$$x_{i+1} = x_i - a \cdot sign\left\{ \hat{f}(x_i + g) - \hat{f}(x_i - g) \right\},$$

где $a - const$, $g - const$ в процессе поиска x_*:

$$x_{i+1} = x_i - a_i \cdot \left\{ \frac{\hat{f}(x_i + g_i) - \hat{f}(x_i - g_i)}{2g_i} \right\},$$

где $\hat{f}(x_i + g_i)$, $\hat{f}(x_i - g_i)$ - оценки по МНК. В этом алгоритме величины g_i, a_i зависят от номера «i» поискового смещения x_i, и по форме этот алгоритм эквивалентен МСА (рис. 4.15).

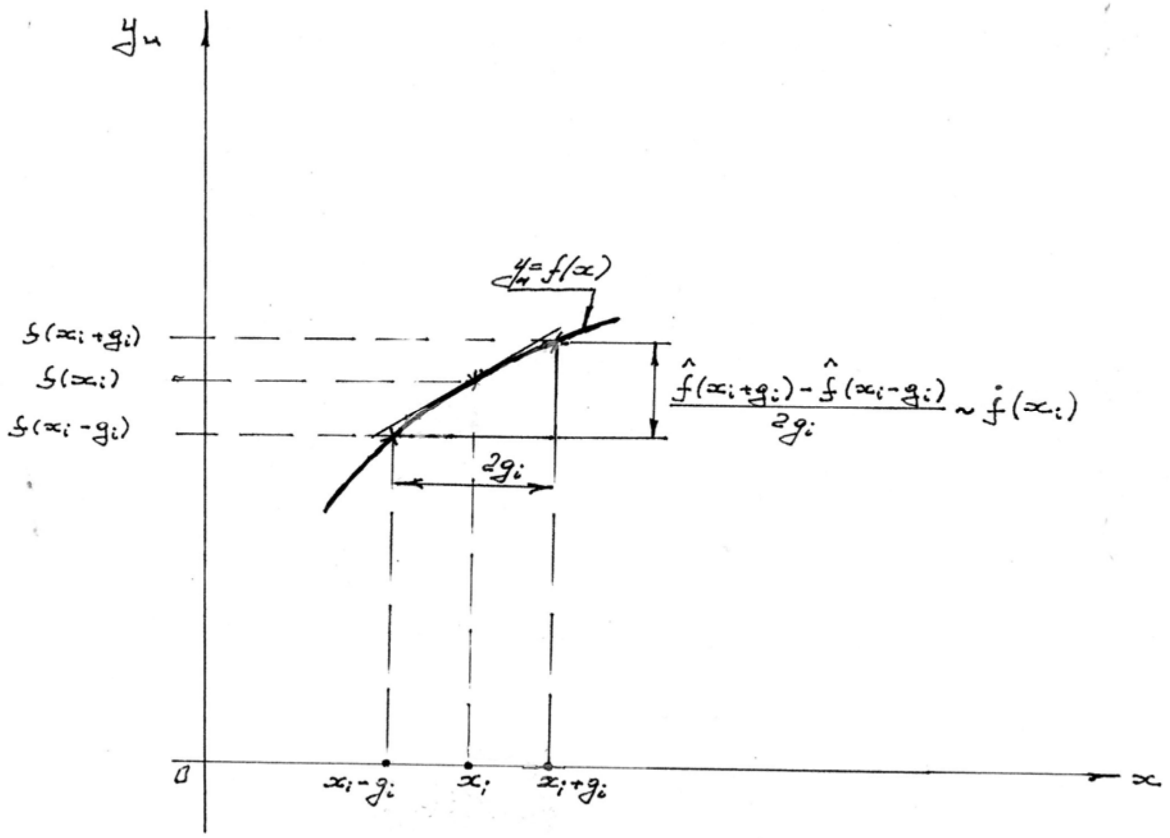

Рис. 4.15 Алгоритм поиска в САО с парными пробами как эквивалентная процедура МСА.

Из рисунка следует:

$$\frac{\hat{f}(x_i + g_i) - \hat{f}(x_i - g_i)}{2g_i} \simeq \dot{f}(x_i),$$

поэтому с точностью до обозначений:

$$\underbrace{x_{i+1}=x_i-a_i\cdot\dot{y}(x_i)}_{МСА}\Leftrightarrow\underbrace{x_{i+1}=x_i-a_i\cdot\dot{y}_н(x_i)}_{\substack{адаптивный\ алгоритм\\ с\ парными\ пробами}}.$$

Наложим ограничения на величины a_i, g_i в адаптивном алгоритме с парными пробами как это сделано в МСА.

Оценки $\hat{f}(x_i+g_i)$, $\hat{f}(x_i-g_i)$ по МНК как было показано ранее являются линейными комбинациями текущих измерений y_i^+, y_i^-:

$$\hat{f}(x_i+g_i)=\sum_{j=1}^{n}b_j y_i^+;\ \hat{f}(x_i-g_i)=\sum_{j=1}^{n}b_j y_i^-,$$

поэтому можно записать:

$$\hat{f}(x_i+g_i)=f(x_i+g_i)+\varepsilon_i^+;\ \hat{f}(x_i-g_i)=f(x_i-g_i)+\varepsilon_i^-,$$

где ε_i^+, ε_i^- есть случайные величины и имеют свойства:

$$\varepsilon_i^+:\qquad E\varepsilon_i^+=0;\ \ D\varepsilon_i^+=D\widehat{f}(x_i+g_i);$$

$$\varepsilon_i^-:\qquad E\varepsilon_i^-=0;\ \ D\varepsilon_i^-=D\widehat{f}(x_i-g_i).$$

Здесь $D\widehat{f}(x_i+g_i)$, $D\widehat{f}(x_i-g_i)$ элементы дисперсионной матрицы оценок по МНК:

$$D\widehat{f}(x_i+g_i)=D\widehat{f}(x_i-g_i)=\delta^2(1,0)\left[(X^TX)^{-1}\right]\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\quad X^T=\begin{pmatrix}1&\dots&1\\ \\ e^{-\tau/T}&\dots&e^{-n\tau/T}\end{pmatrix}_{(2\times n)}.$$

Запишем адаптивный алгоритм в другой форме:

$$x_{i+1}=x_i-\left(\frac{a_i}{2g_i}\right)\cdot\left[f(x_i+g_i)+\varepsilon_i^+-f(x_i-g_i)-\varepsilon_i^-\right].$$

Разложим $f(x_i+g_i)$, $f(x_i-g_i)$ в ряд Тейлора в окрестности x_i, полагая, что g_i является маленькой величиной:

$$f(x_i+g_i)+\varepsilon_i^+-f(x_i-g_i)-\varepsilon_i^+\simeq\dot{f}(x=x_i)\cdot 2g_i+\varepsilon_i^+-\varepsilon_i^-.$$

Подставим это выражение в адаптивный алгоритм:

$$\Delta x_i=x_{i+1}-x_i\simeq-\left[a_i\cdot\dot{f}(x=x_i)+0,5\frac{a_i}{g_i}(\varepsilon_i^+-\varepsilon_i^-)\right].$$

Для расстояния l_N от начальной точки x_1 до конечной точки x_N имеем по аналогии с МСА (рис. 4.13):

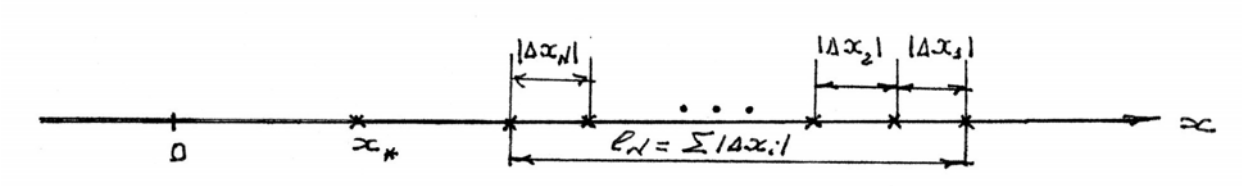

Рис 4.13. Итерационная процедура МСА.

$$l_N = \sum_{i=1}^{N} \left|\Delta x_i\right| = \sum_{i=1}^{N} a_i \cdot \underbrace{\dot{f}(x = x_i)}_{=\max(\bullet)=F} + 0,5\sum_{i=1}^{N} \frac{a_i}{g_i}(\varepsilon_i^+ - \varepsilon_i^-) \le F \cdot \sum_{i=1}^{N} a_i + 0,5\sum_{i=1}^{N} \frac{a_i}{g_i}(\varepsilon_i^+ - \varepsilon_i^-),$$

где $F = \max_i \dot{f}(x = x_i)$.

Для оператора E математического ожидания имеем:

$$El_N \le E\left[F \cdot \sum_{i=1}^{N} a_i + 0,5\sum_{i=1}^{N} \frac{a_i}{g_i}(\varepsilon_i^+ - \varepsilon_i^-) \right] = F \cdot \sum_{i=1}^{N} a_i + 0,5\sum_{i=1}^{N} \frac{a_i}{g_i}\underbrace{(E\varepsilon_i^+ - E\varepsilon_i^-)}_{=0} = F \cdot \sum_{i=1}^{N} a_i \ .$$

Аналогично для оператора D дисперсии:

$$Dl_N \le D\left[F \cdot \sum_{i=1}^{N} a_i + 0,5\sum_{i=1}^{N} \frac{a_i}{g_i}(\varepsilon_i^+ - \varepsilon_i^-) \right] = 0 + (0,5)^2 \cdot \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{a_i}{g_i}\right)^2 \cdot (D\varepsilon_i^+ - D\varepsilon_i^-).$$

Так как:

$$\hat{f}(x_i + g_i) = f(x_i + g_i) + \varepsilon_i^+ \ \Rightarrow \ \varepsilon_i^+ = \hat{f}(x_i + g_i) - \underbrace{f(x_i + g_i)}_{=const};$$

$$\hat{f}(x_i - g_i) = f(x_i - g_i) + \varepsilon_i^- \ \Rightarrow \ \varepsilon_i^- = \hat{f}(x_i - g_i) - \underbrace{f(x_i - g_i)}_{=const},$$

поэтому:

$$Dl_N \le 0,25 \cdot \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{a_i}{g_i}\right)^2 \cdot \left[\hat{f}(x_i + g_i) - f(x_i + g_i) - \hat{f}(x_i - g_i) - f(x_i - g_i) \right],$$

откуда:

$$l_N \le 0,25 \cdot \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{a_i}{g_i}\right)^2 \cdot 2D\hat{f}(x_i + g_i),$$

так как очевидно, что $D\hat{f}(x_i + g_i) = D\hat{f}(x_i - g_i)$.

$$D\left[\hat{f}(x_i+g_i)-\hat{f}(x_i-g_i)\right]=2D\hat{f}(x_i+g_i)\,.$$

$$D\hat{f}(x_i+g_i):$$

$$D\hat{f}(x_i+g_i)=R\cdot\delta^2\left(X^TX\right)^{-1}\cdot R^{-1}=\delta^2(1,0)\begin{pmatrix} D\hat{f}(x_i+g_i) & * \\ * & * \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\Bigg|_{n-const} - const$$

поэтому:

$$Dl_N\le 0,5\cdot F_1\cdot\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{a_i}{g_i}\right)^2,\ F_1=\max_i D\hat{f}(x_i+g_i)\,.$$

Для сходимости итерационного процесса необходимо:

$$\lim_{N\to\infty}El_N=\infty,\quad \lim_{N\to\infty}Dl_N=0,$$

что в результате дает следующие условия сходимости:

1. $F=\max_i \dot{f}(x=x_i)<\infty$
2. $\sum_{i=1}^{\infty}a_i=\infty$
3. $F_1=\max_i D\hat{f}(x_i+g_i)<\infty$
4. $\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{a_i}{g_i}\right)^2<\infty$.

Эти условия в теории адаптивных систем управления принято называть условиями Кифера и Вольфовица (Kifer J., Wolfowitz J.).

Условия 2 и 4 определяют правила для выбора a_i, g_i в адаптивной САО, например:

$$a_i=\frac{1}{i^{\alpha}},\ g_i=\frac{1}{i^{\beta}},$$

где $\alpha,\ \beta$ - некоторые параметры, для которых должны выполняться ограничения (рис. 4.16):

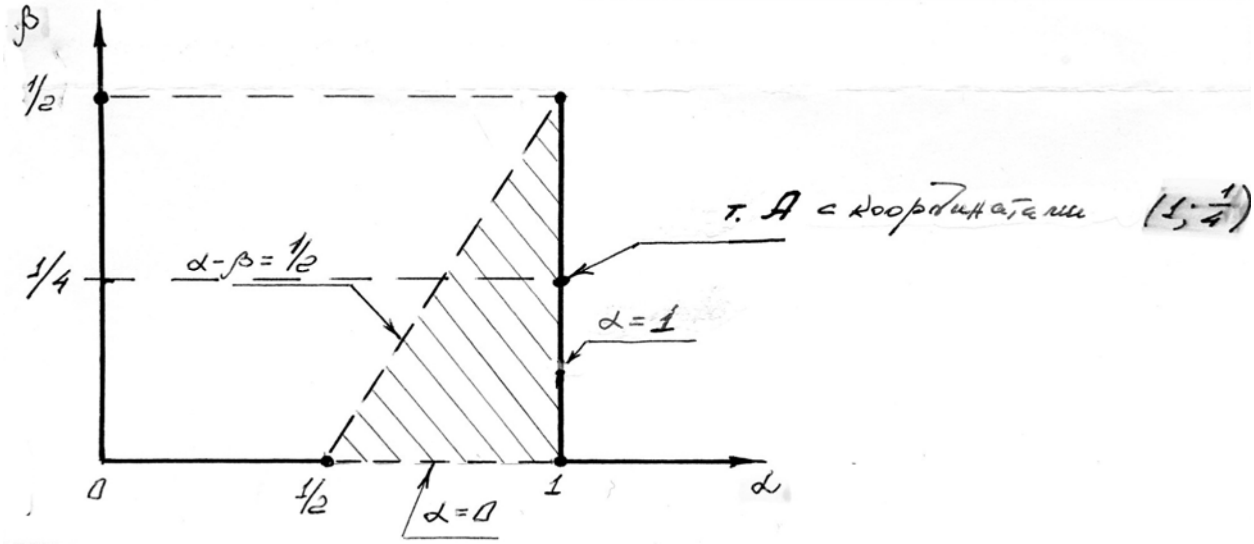

Рис. 4.16. Зона выбора параметров α, β в условиях Кифера-Вольфовитца.

$$0 < \alpha \le 1, \quad \beta > 0, \quad \alpha - \beta > \tfrac{1}{2}.$$

В частности условия сходимости 2 и 4 выполняются при

$$\alpha = 1, \quad \beta = \tfrac{1}{4}.$$

Действительно:

$$\sum a_i = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = \infty, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{a_i}{g_i} \right)^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\frac{1}{i}}{\frac{1}{i^{1/4}}} \right)^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^{3/2}} < \infty,$$

по признаку сходимости Даламбера:

$$\frac{a_{i+1}}{a_i} = \frac{\frac{1}{(i+1)^{3/2}}}{\frac{1}{i^{3/2}}} = \frac{1}{(1+\frac{1}{i})^{3/2}} < 1.$$

Таким образом, алгоритм САО с адаптацией пробных «g_i» и рабочих «a_i» шагов, синтезированный по МСА имеет вил (рис 4.17):

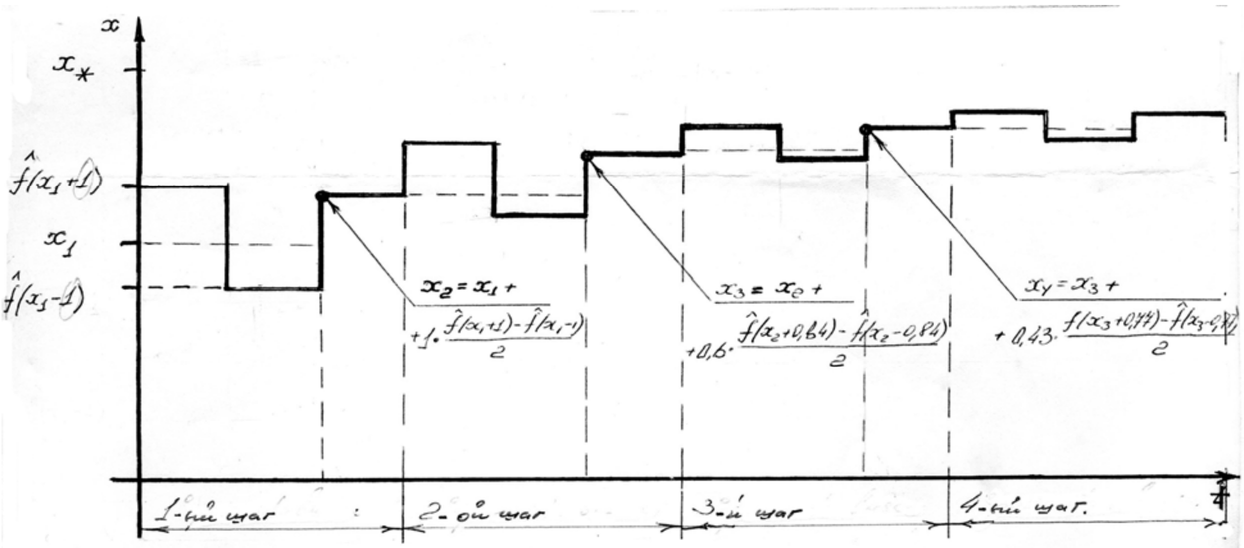

Рис. 4.17. Изменение рабочих и поисковых смещений в адаптивной САО.

$$x_{i+1} = \frac{\frac{a}{i}}{2\frac{g}{i^{1/4}}} \cdot \left\{ \hat{f}\left(x_i + \frac{g}{i^{1/4}} \right) - \hat{f}\left(x_i + \frac{g}{i^{1/4}} \right) \right\}, \quad i = \overline{1,m},$$

$\hat{f}(\cdot)$ - оценка МНК; $a,\ g$ - рабочие и пробные шаги в начале поиска экстремальной точки x_* зависимости $f(x)$.

Алгоритм вдали от экстремума, когда крутизна $y = f(x)$, измеряемая $\dot{f}(x = x_i)$, является значительной, обеспечивает большие значения параметров a_i, g_i шага поиска, а далее (рис 4.9) по мере приближения к экстремальной точке x_*, когда $\dot{f}(x = x_i)$ уменьшается, параметры шага a_i, g_i также уменьшаются.

4.2.2. Метод Качмажа (МК)

Общие положения МК

Модель объекта линейна и имеет форму:

$$y(t) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \cdot f_i(t) = F^T(t) \cdot A = A^T \cdot F(t),$$

где:

$F^T(t) = \left(f_0(t),\ ...,\ f_{n-1}(t)\right)$ - вектор $(1 \times n)$ базисных функций;

$A^T = \left(a_0,\ ...,\ a_{n-1}\right)$ - вектор $(1 \times n)$ неизвестных параметров.

Имеем совокупность измерений

$$\left\{f_i(t_j), y_j\right\}, \quad j = \overline{1, N}, \quad N > n - 1.$$

Необходимо определить вектор $\hat{A}$ неизвестных параметров A.

Подставим измерения в модель:

$$y_j = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \cdot f_i(t_j), \quad j = \overline{1, N}.$$

Рассмотрим систему координат $a_0,\ ...,\ a_{n-1}$. Каждое уравнение $y_j = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \cdot f_i(t_j)$ это гиперплоскость в выбранной системе координат, а решение $\hat{A}$ это точка пересечения гиперплоскостей $y_1,\ ...,\ y_n$ (рис. 4.18).

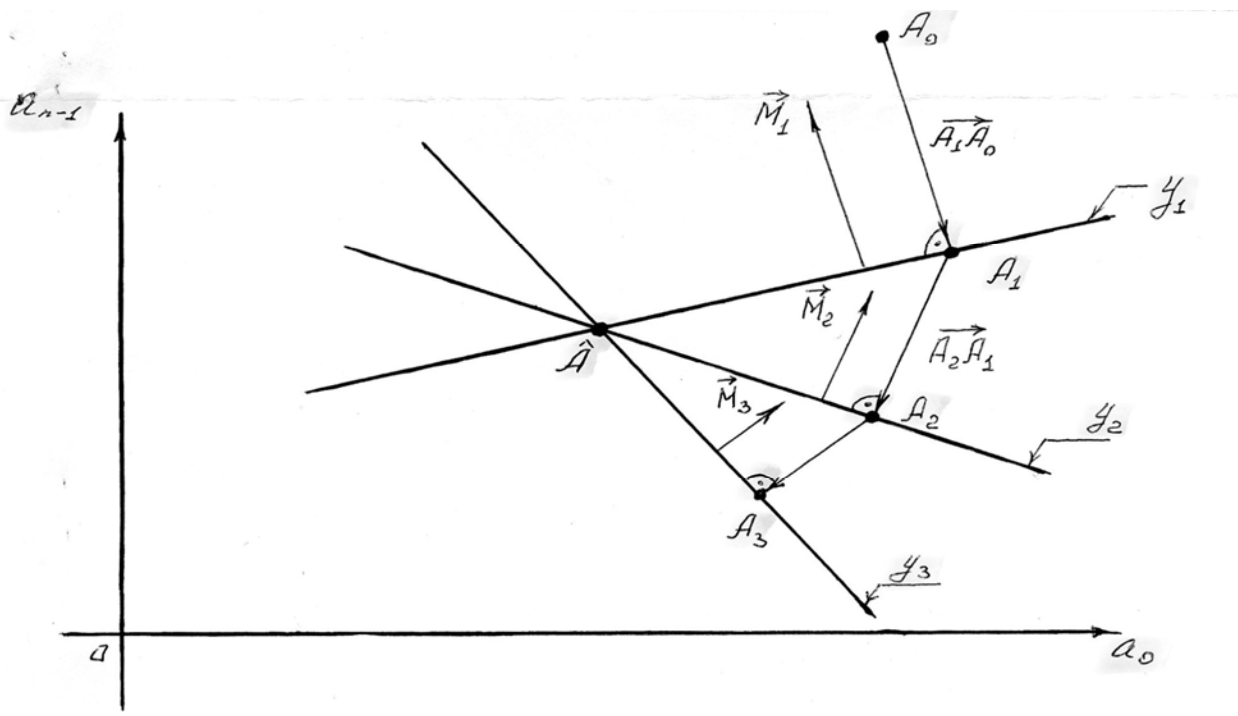

Рис. 4.18. Геометрическое представление итерационной процедуры Качмажа.

В геометрической интерпретации алгоритм строится следующим образом. Берется начальная точка A_0, не принадлежащая ни одной из гиперплоскостей. Из точки A_0 опускается перпендикуляр на правую гиперплоскость y_1. В результате пересечения перпендикуляра с гиперплоскостью y_1 получается точка A_1. Из точки A_1 опускается перпендикуляр на гиперплоскость y_2, получается точка A_2, из A_2 - перпендикуляр на гиперплоскость y_3 и. т. д. В результате образуется совокупность точек $\{A_i\}_{i=0}^{N}$. Доказывается, что:

$$\{A_i\}_{i=0}^{N} \underset{N\to\infty}{\to} \hat{A}.$$

Формализуем это геометрическое представление. Точка A_0 имеет координаты $A_0 = \left(a_{0\,0},\ a_{1\,0},\ ...,\ a_{n-1\,0}\right)$, а точка A_1, координаты $A_1 = \left(a_{0\,1},\ a_{1\,1},\ ...,\ a_{n-1\,1}\right)$ и принадлежит гиперплоскости y_1 ($m.\ A_1 \in y_1$), поэтому:

$$a_{0\,1}\cdot f_0(t_1) + a_{1\,1}\cdot f_1(t_1) + ... + a_{n-1\,1}\cdot f_{n-1}(t_1) - y_1 = 0.$$

Вектор A_0A_1 имеет координаты:

$$A_0A_1 = (a_{0\,1} - a_{0\,0},\ a_{1\,1} - a_{0\,1},\ ...,\ a_{n-1\,1} - a_{n-1\,1}).$$

Из аналитической геометрии известно, что, если в системе координат $a_0,\ ...,\ a_{n-1}$ имеем уравнение гиперплоскости $a_0\cdot f_0(t_1) + ... + a_{n-1}\cdot f_{n-1}(t_1) = y_1$, то ее направляющие векторы $f_0(t_1),\ ...,\ f_{n-1}(t_1)$ это есть координаты перпендикуляра M_1 к гиперплоскости y_1. Поэтому:

$$M_1 = \left(f_0(t_1),\ ...,\ f_{n-1}(t_1)\right).$$

Из рисунка 4.18 следует, что вектора A_0A_1 и M_1 должны быть параллельны, то есть их координаты должны быть пропорциональны:

$$\frac{a_{0\,1} - a_{0\,0}}{f_0(t_1)} = ... = \frac{a_{n-1\,1} - a_{n-1\,0}}{f_{n-1}(t_1)} = m.$$

Это дает:

$$\begin{cases} \left.\begin{matrix} a_{0\,1} - a_{0\,0} = mf_0(t_1) \\ \vdots \\ a_{n-1\,1} - a_{n-1\,0} = mf_{n-1}(t_1) \end{matrix}\right] A_1A_0 \parallel M_1 \\ \left. a_{0\,1}f_0(t_1) + \ldots + a_{n-1\,0}f_{n-1}(t_1) = y_1 \right] \quad т.\ A_1 \in y_1 \end{cases}$$

Это система уравнений относительно $a_{0\,1}$, ..., $a_{n-1\,1}$, m, т.е. имеем «$n+1$» неизвестных и «$n+1$» уравнений. Решаем ее методом подстановки:

$$a_{0\,1} = a_{0\,0} + m \cdot f_0(t_1);\ a_{1\,1} = a_{1\,0} + m \cdot f_1(t_1);\ \ldots;\ a_{n-1\,1} = a_{n-1\,0} + m \cdot f_{n-1}(t_1).$$

$$\left[a_{0\,0} + m \cdot f_0(t_1)\right] \cdot f_0(t_1) + \ldots + \left[a_{n-1\,0} + m \cdot f_{n-1}(t_1)\right] \cdot f_{n-1}(t_1) = y_1,$$

откуда, разрешая относительно «m» последнее уравнение, получим:

$$m = \frac{y_1 - \sum_{i=0}^{n-1} a_{0\,i} \cdot f_i(t_1)}{\sum_{i=0}^{n-1} f_i^2(t_1)} = \frac{y_1 - \left(A_0^T,\ F(t = t_1)\right)}{\left(F^T(t_1), F\ (t_1)\right)},$$

где $(\cdot,\cdot)$ - скалярное произведение.

Подставим «m» в первые «n» уравнений, тогда:

$$A_1 = A_0 + \frac{y_1 - \left(A_0^T,\ F(t_1)\right)}{\left(F^T(t_1), F(t_1)\right)} \cdot F(t_1).$$

Таким образом, нашли координаты $т.\ A_1 \in y_1$ (гиперплоскость).

Аналогично:

$$A_2 = A_1 + \frac{y_2 - \left(A_1^T,\ F(t_2)\right)}{\left(F^T(t_2), F(t_2)\right)} \cdot F(t_2)$$

$$\vdots$$

$$A_N = A_{N-1} + \frac{y_N - \left(A_{N-1}^T,\ F(t_N)\right)}{\left(F^T(t_N), F(t_N)\right)} \cdot F(t_N).$$

Этот алгоритм достаточно простой при его реализации на μK, однако он обладает низкой скоростью сходимости. Адаптация состоит в последовательной процедуре обработки текущих измерений (в темпе с процессом поступления измерений – on line).

Условие останова процесса задается в виде:

$$\left|A_N - A_{N-1}\right| \le \varepsilon, \quad \varepsilon \text{ - заданное число.}$$

Синтез адаптивного алгоритма САО на базе МК

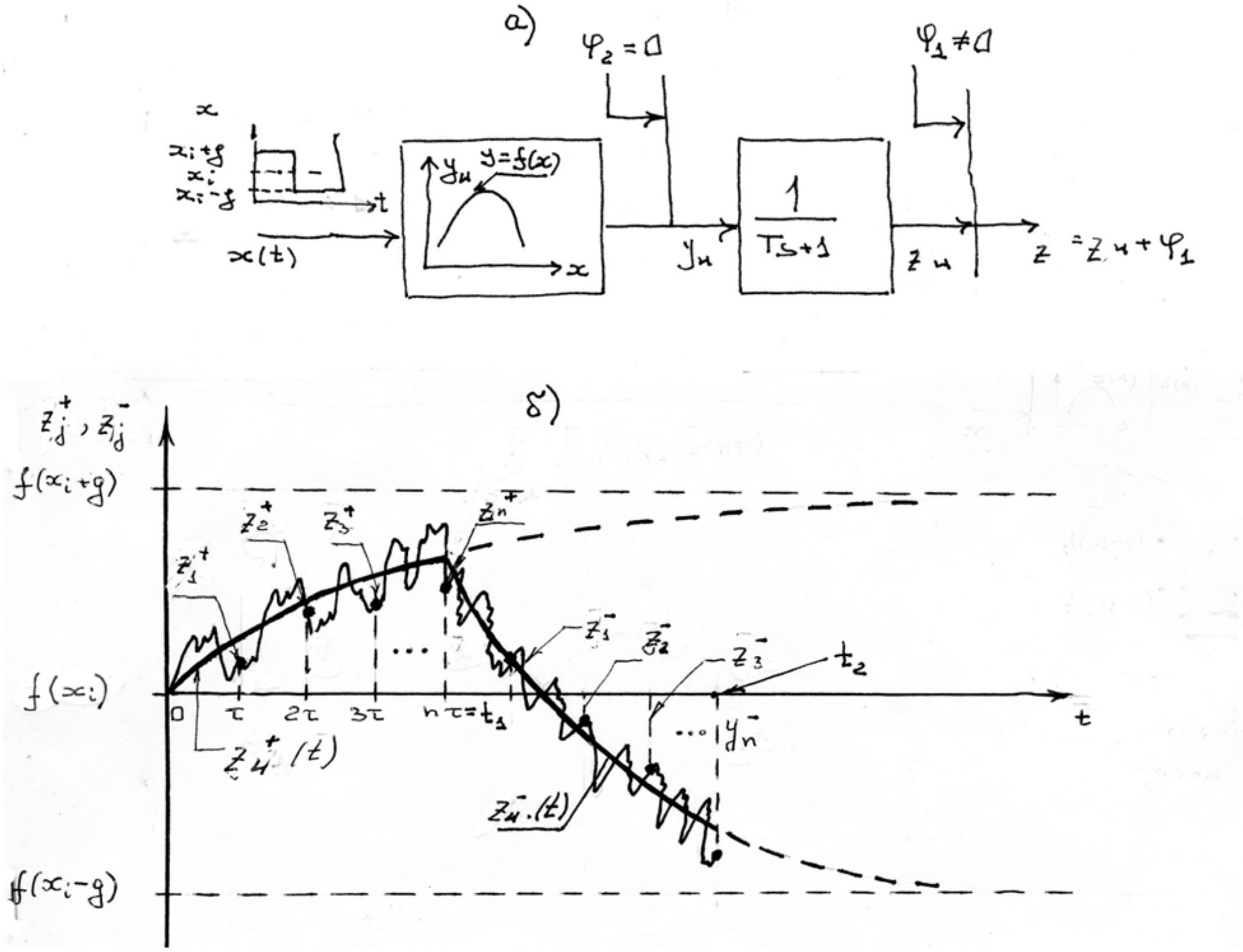

Рис. 4.7. Модель объекта (а) и переходные процессы на его выходе.

Имеем объект типа Н.-Л. С известной величиной Т (рис 4.7) и для уменьшения влияния Т на время поиска x_* зависимости $y = f(x)$ используется прогнозирование установившегося значения $f(x_i + g)$, $f(x_i - g)$ при подаче на вход объекта парных проб $\pm g$ относительно x_i.

В этом случае имеем:

$$y^+(t) = f(x_i + g)\cdot 1 + a_1^+ e^{-t/T} = f(x_i + g)\cdot f_0(t) + a_1^+ \cdot f_1(t)$$

Или в терминах МК:

$$f_0(t) = 1, \quad f_2(t) = e^{-t/T}.$$

В соответствии с процедурой МК имеем:

$$\hat{f}_N(x_i+g)=(1,0)\left[\begin{pmatrix}\hat{a}_{0,N-1}\\ \hat{a}_{1,N-1}\end{pmatrix}+\frac{y_N-\left(A_{N-1}^T,\ F(t_N)\right)}{\left(F^T(t_N),F(t_N)\right)}\cdot\begin{pmatrix}f_0(t_N)\\ f_1(t_N)\end{pmatrix}\right]=$$

$$=(1,0)\cdot\left[\begin{pmatrix}\hat{f}_{N-1}(x_i+g)\\ \hat{a}_{1,N-1}\end{pmatrix}+\frac{z_N-\left[\hat{f}_{N-1}(x_i+g)+\hat{a}_{1,N-1}\cdot e^{-\frac{N\tau}{T}}\right]}{1+\left(e^{-\frac{N\tau}{T}}\right)^2}\cdot\begin{pmatrix}1\\ e^{-\frac{N\tau}{T}}\end{pmatrix}\right]=$$

$$=b_N\cdot z_N+c_N\cdot\hat{f}_{N-1}(x_i+g)-d_N\cdot\hat{a}_{1,N-1},$$

$$b_N=(1+e^{\frac{-2N\tau}{T}})^{-1},\quad c_N=e^{\frac{-2N\tau}{T}}(1+e^{\frac{-2N\tau}{T}})^{-1},\quad d_N=e^{\frac{-N\tau}{T}}(1+e^{\frac{-2N\tau}{T}})^{-1}.$$

Аналогичные вычисления делаются для $\hat{f}_N(x_i-g)$, поэтому:

$$x_{i+1}=x_i+a\cdot sign\left\{\hat{f}_N(x_i+g)-\hat{f}_N(x_i-g)\right\}.$$

4.2.3. Метод фильтра Калмана (МФК)

Общие положения МФК

Имеется динамический объект, модель которого задана в форме дифференциального уравнения в пространстве состояний. На вход и выход объекта воздействуют случайные возмущения, которые моделируют ошибки в управлении и измерении состояний. Необходимо синтезировать алгоритм оценки состояний объекта, который обеспечивает минимум дисперсии его оценок.

Пусть имеем модель объекта в пространстве состояний (рис. 4.19):

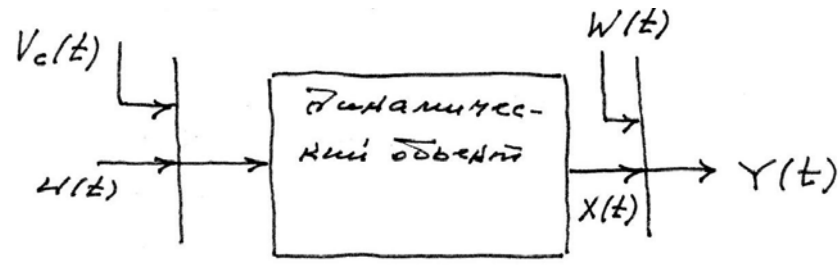

Рис. 4.19. Модель объекта при воздействии случайных возмущений на его входе и выходе.

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A_c(t)\cdot X(t) + D_c(t)\cdot U(t) + V_c(t) \\ Y(t) = H_c(t)\cdot X(t) + W(t) \end{cases},$$

где $X(t) = \left(x_1(t),\ ...,\ x_n(t)\right)$ - вектор состояний объекта;

$U(t) = \left(u_1(t),\ ...,\ u_n(t)\right)$ - вектор управления;

$H_c(t)$ - матрица;

$Y^T(t) = \left(y_1(t),\ ...,\ y_n(t)\right)$ - вектор измерений выхода объекта;

$V_c^T(t) = \left(v_1(t),\ ...,\ v_n(t)\right)$ - вектор случайных возмущений управления;

$W^T(t) = \left(w_1(t),\ ...,\ w_n(t)\right)$ - вектор случайных возмущений при измерении состояний объекта.

Ковариационные матрицы:

$$DW(t),\quad DV_c(t)$$

Случайных процессов $W(t),\ \ V_c(t)$ заданы.

Пример. Пусть $DW(t) = 0,\ \ DV_c(t)$; модель объекта:

$$\ddot{y}(t) = a_0,\quad a_0 - const.$$

Необходимо записать эту модель в пространстве состояний.

В канонической (стандартной) форме модель объекта имеет вид:

$$1\cdot \underbrace{\ddot{y}(t)}_{\dot{x}_2} + 0\cdot \underbrace{\dot{y}(t)}_{x_2=\dot{x}_1} + 0\cdot \underbrace{y(t)}_{x_1} = a_0.$$

После замены переменных (замена Коши) получим:

$$\begin{cases} y = x_1 \\ \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = a_0 \end{cases}$$

или в матричной форме:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0\cdot x_2 + 1\cdot x_2 + 0\cdot a_0 \\ \dot{x}_2 = 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 1\cdot a_0 \\ y = 1\cdot x_1 + 0\cdot x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overbrace{\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix}}^{\dot{X}} = \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}^{A_c} \overbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}^{X} + \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}^{D_c} \overbrace{\begin{pmatrix} a_0 \\ 0 \end{pmatrix}}^{U} \\ \underbrace{\begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}}_{Y} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{H_c} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{X} \end{cases}.$$

Рассмотрим дискретный вариант модели в пространстве состояний. Для этого используем обозначения:

$X(t) = X[k], \quad X(t \to \tau) = X[k+1], \quad \tau$ - шаг по времени, k - номер измерения, тогда:

$$\dot{X}(t) \simeq \frac{X(t+\tau) - X(t)}{\tau} = \frac{X[k+1] - X[k]}{\tau}.$$

Разностная модель будет иметь вид:

$$\begin{cases} X[k+1] = A[k] \cdot X[k] + D[k] \cdot U[k] \cdot V[k] \\ Y[k+1] = H[k] \cdot X[k] \cdot W[k] \end{cases},$$

где $A[k] = \{I + A_c[k] \cdot \tau\}; \quad D[k] = D_c[k] \cdot \tau; \quad V[k] = V_c[k] \cdot \tau.$

Для простоты положим:

$$A[k] = A; \quad D[k] = D; \quad H[k] = H,$$

тогда в результате получим:

$$\begin{cases} X[k+1] = AX[k] + DU[k] \cdot V[k] \\ Y[k+1] = H[k] \cdot X[k] \cdot W[k] \end{cases}.$$

Относительно случайных возмущений полагаем:

1. $\left.\begin{matrix} EV[k] = 0 \\ EW[k] = 0 \end{matrix}\right\}$ условия центрированности возмущений;

2. $$\left.\begin{matrix} DV[k] = R \cdot \delta_{K_j} \sim \begin{pmatrix} * & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix} \\ DW[k] = Q \cdot \delta_{K_j} \sim \begin{pmatrix} * & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix} \\ \delta_{K_j} = \begin{cases} 1, & k = j \\ 0, & k \neq j \end{cases} \\ R,\ Q - \textit{заданные матрицы} \end{matrix}\right\}$$ условия на измерения на входе и выходе объекта относительно их некоррелированности

3. $E\{V[k] \cdot W^T[k]\} = 0$ - условие некоррелированности случайных процессов $V[k]$ *и* $W[k]$.

<u>Постановка задачи</u>. Имеем число «k» измерений управления $u[j], \ j = \overline{1,k}$ со случайными возмущениями $V[j], \ j = \overline{1,k}$ на входе объекта и число «k»

измерений $y[j],\ j=\overline{1,k}$ со случайными возмущениями $W[j],\ j=\overline{1,k}$ на выходе объекта. Имеем дискретную модель объекта и модель измерительной системы в пространстве состояний. Для момента «i» времени необходимо найти оценку $\hat{X}$ вектора состояний X из условия (рис. 4.20)

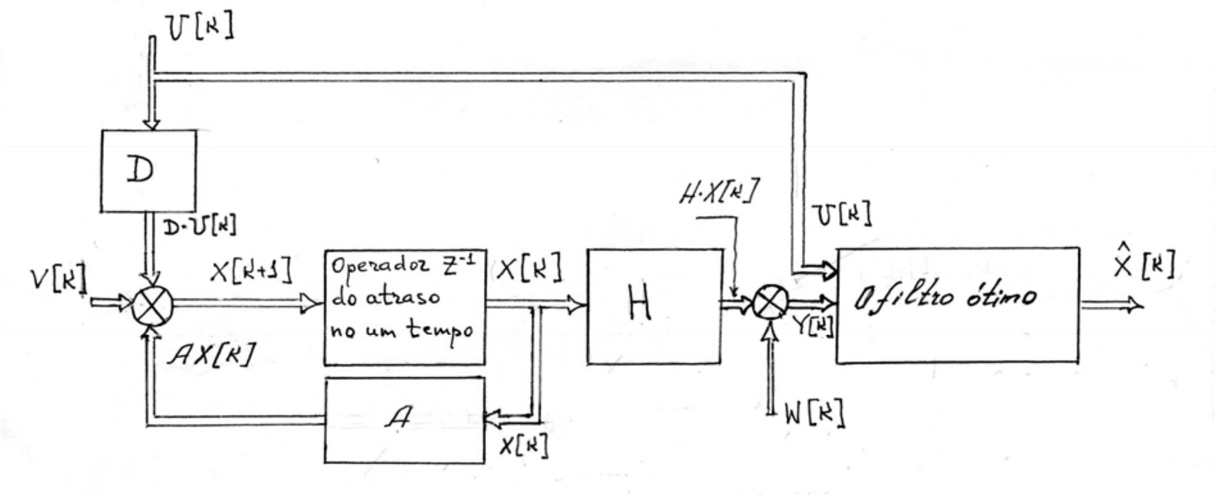

Рис. 4.20. Оптимальная фильтрация с помощью фильтра Калмана.

$$\min D\hat{X}[i],\ \ i=\overline{1,k}.$$

В теории цифровых систем управления обычно используется следующая терминология:

$i<k$ - задача сглаживания;

$i=k$ - задача оптимальной фильтрации;

$i>k$ - задача прогнозирования.

Рассмотрим <u>частный случай фильтра</u>, который затем обобщим. Пусть имеем:

1. $U[k]=0$ - управление отсутствует;

2. $V[k]=0$ - случайные возмущения отсутствуют;

3. $Y^T[k]=y_1[k]$ - вектор измерений на выходе имеет одну компоненту.

В условиях 1-3 будем иметь модель объекта и измерительной системы в виде:

$$\begin{cases} X[k+1] = AX[k] \\ y_1[k] = h^T \cdot X[k] + W_1[k] \end{cases}.$$

Из первого уравнения:

$$X[k] = A^{-1} \cdot X[k+1],$$

которое подставляем во второе уравнение:

$$y_1[k] = h^T A^{-1}[k+1] + W_1[k].$$

Оператор A^{-1} преобразует вектор $X[i+1]$ в вектор $X[i]$ ($X[i+1] \xrightarrow{A} X[i]$), поэтому будем иметь цепочку отношений:

$$\begin{aligned} &X[1] = A^{-1} \cdot X[2] = A^{-1}(A^{-1}X[3]) = ... = A^{-(k-1)}X[k]; \\ &X[2] = A^{-1} \cdot X[3] = A^{-1}(A^{-1}X[4]) = ... = A^{-(k-2)}X[k]; \\ &\vdots \\ &X[i] = A^{-(k-i)} \cdot X[k],\ i = \overline{1,k}. \end{aligned}$$

При наличии числа «k» измерений $y_1[1], y_1[2],\ ...,\ y_1[k]$ на выходе будем иметь СЛАУ относительно неизвестного вектора $X^T[k] = \left(x_1[k],\ ...,\ x_n[k]\right)_{(1\times n)}$:

$$\begin{cases} y_1[1] = h^T A^{-1} X[2] + w_1[1] = \left\{X[2] = A^{-(k-2)} \cdot X[k]\right\} = h^T A^{-(k-2)} \cdot X[k] + w_1[1] \\ \vdots \\ y_1[1] = h^T A^{-(k-k)} \cdot X[k] + w_1[k] \end{cases}$$

или в матричной форме:

$$Y_1[k] = \Phi[k] \cdot X[k] + W_1[k],$$

где $Y_1^T[k] = (y_1[1],\ ...,\ y_1[k])$; $W_1^T[k] = (w_1[1],\ ...,\ w_1[k])$;

$$\Phi[k] = \begin{pmatrix} h^T_{(1\times n)}\ A^{-(k\times 1)}_{(n\times n)} \\ \vdots \\ h^T_{(1\times n)}\ A^{-(k\times k)}_{(n\times n)} \end{pmatrix}$$ - матрица размером $\dim\ (k \times n)$.

Полагаем далее, что число «k» измерений: $k > n$, где n - число неизвестных параметров $X^T[k] = \left(x_1[k],\ ...,\ x_n[k]\right)$, кроме этого полагаем, что $EW_1 = 0,\ DW_1 = \delta^2 \cdot I$.

В этих условиях вектор неизвестных параметров $X[k]$ будем искать по МНК.

$$\min W_1^T[k] \cdot W_1[k] = \min_{X[k]} \left(Y_1[k] - \Phi[k] \cdot X[k]\right)^T \cdot \left(Y_1[k] - \Phi[k] \cdot X[k]\right).$$

Для получения адаптивного МНК для него используется рекуррентная форма. Эта форма базируется на следующих сведениях из алгебры матриц:

• блочное умножение матриц:

$$\left(A \mid B \right) \begin{pmatrix} C \\ --- \\ D \end{pmatrix} = AC + BD;$$

• обращение матрицы, представленной в виде сумм двух матриц

$$A^{-1} = (B + CDE)^{-1} = B^{-1} - B^{-1}C(D^{-1} + EB^{-1}C)^{-1} EB^{-1}.$$

В соответствии с МНК имеем:

$$\hat{X}[k] = \left(\Phi^T[k] \cdot \Phi[k] \right)^{-1} \cdot \Phi^T[k] \cdot Y_1[k].$$

Используем обозначение:

$$P[k] = (\Phi^T[k] \cdot \Phi[k])^{-1},$$

тогда:

$$\hat{X}[k] = P[k] \cdot \Phi^T[k] \cdot Y_1[k].$$

Запишем матрицу $\Phi[k]$ и вектор $Y_1[k]$ в блочной форме:

$$\Phi[k] = \begin{pmatrix} \Phi[k-1] \cdot A^{-1} \\ ------- \\ h^T \end{pmatrix}; \quad Y_1^T[k] = \left(Y_1[k-1] \mid y_1[k] \right),$$

тогда:

$$\hat{X}[k] = P[k] \cdot \begin{pmatrix} \Phi[k-1] \cdot A^{-1} \\ ------- \\ h^T \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} Y_1[k-1] \\ ----- \\ y_1[k] \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} U \\ -- \\ V \end{pmatrix}^T = \left(U \mid V \right) \right\} =$$

$$= P[k] \cdot \left(\left(\Phi[k-1] \cdot A^{-1} \right)^T \mid h \right) \cdot \begin{pmatrix} Y_1[k-1] \\ ----- \\ y_1[k] \end{pmatrix} = \left\{ \textit{умножение блочных матриц} \right\}$$

$$= P[k] \cdot \left\{ (A^{-1})^T \Phi^T[k-1] \cdot Y_1[k-1] + h \cdot y_1[k] \right\}.$$

Для $P[k]$ имеем:

$$P[k]=\left(\Phi^T[k]\cdot\Phi[k]\right)^{-1}=\left[\begin{pmatrix}\Phi[k-1]\cdot A^{-1}\\ -------\\ h^T\end{pmatrix}^T\cdot\begin{pmatrix}\Phi[k-1]\cdot A^{-1}\\ -------\\ h^T\end{pmatrix}\right]^{-1}=$$

$$=\left\{\begin{pmatrix}U\\ --\\ V\end{pmatrix}^T=\left(U\ \vdots\ V\right)\right\}=\left[\left((A^{-1})^T\cdot\Phi^T[k-1]\ \vdots\ h\right)\begin{pmatrix}\Phi[k-1]\cdot A^{-1}\\ -------\\ h^T\end{pmatrix}\right]^{-1}=$$

$$=\left[(A^{-1})^T\cdot\underbrace{\Phi^T[k-1]\cdot\Phi[k-1]}_{P^{-1}[k-1]}\cdot A^{-1}+h\cdot h^T\right]^{-1}=$$

$$=\left[(A^{-1})^T\cdot P^{-1}[k-1]\cdot A^{-1}+h\cdot I\cdot h^T\right]^{-1}=\left\{U^{-1}V^{-1}Z^{-1}=(ZVU)^{-1}\right\}=$$

$$=\left[(\underbrace{A\cdot P[k-1]\cdot A^T}_{M[k-1]})^{-1}+h\cdot I\cdot h^T\right]^{-1}=\left[\underbrace{M^{-1}[k-1]}_{B}+\underbrace{h}_{C}\cdot\underbrace{I}_{D}\cdot\underbrace{h^T}_{E}\right]^{-1}=$$

$$=\left\{\text{обратная матрица от суммы}\right\}=$$

$$=\underbrace{\left(M^{-1}[k-1]\right)^{-1}}_{B^{-1}}-\underbrace{\left(M^{-1}[k-1]\right)^{-1}}_{B^{-1}}\cdot\underbrace{h}_{C}\cdot\left[\underbrace{I^{-1}}_{D^{-1}}+\underbrace{h^T}_{E}\underbrace{\left(M^{-1}[k-1]\right)^{-1}}_{B^{-1}}\cdot\underbrace{h}_{C}\right]^{-1}\cdot\underbrace{h^T}_{E}\cdot\underbrace{\left(M^{-1}[k-1]\right)^{-1}}_{B^{-1}}=$$

$$=M[k-1]-M[k-1]\cdot h\cdot\left(1+\underbrace{\underbrace{h^T\cdot M[k-1]\cdot h}_{(1\times n)(n\times n)(n\times 1)=(1\times 1)}}_{\text{число }\alpha\Rightarrow(1+\alpha[k-1])^{-1}=\gamma[k-1]}\right)^{-1}\cdot h^T\cdot M[k-1]=$$

$$=M[k-1]-M[k-1]\cdot h\cdot\gamma[k-1]\cdot h^T\cdot M[k-1]=M[k-1]-\gamma[k-1]\cdot M[k-1]\cdot h\cdot h^T\cdot M[k-1].$$

В результате получим:

$$\hat{X}[k]=\underbrace{\left(M[k-1]-\gamma[k-1]\cdot M[k-1]\cdot h\cdot h^T\cdot M[k-1]\right)}_{P[k]}\cdot\left((A^{-1})^T\cdot\Phi^T[k-1]\cdot Y_1[k-1]+h\cdot y_1[k]\right)=$$

$$=\left\{\text{раскрываем скобки и приводим подобные члены}\right\}=$$

$$=\underbrace{M[k-1]\cdot(A^{-1})^T\cdot\Phi[k-1]\cdot Y_1[k-1]}_{(1)}+\gamma[k-1]\cdot M[k-1]\cdot h\cdot y_1[k]-h^T\cdot M[k+1]\cdot(A^{-1})^T\,\Phi[\mathrm{k}-1]Y_1[k-1].$$

Рассмотрим (1):

$$(1)=\left\{(A)=(A^T)^{-1},\ \ AP[k-1]A^T=(\Phi^T[k-1]\cdot\Phi[k-1])^{-1}\right\}=$$

$$=A\left(\Phi^T[k-1]\cdot\Phi[k-1]\right)^{-1}\cdot\underbrace{A^T(A^T)^{-1}}_{I}\cdot\Phi^T[k-1]\cdot Y_1[k-1]=$$

$$=A\underbrace{\left(\Phi^T[k-1]\cdot\Phi[k-1]\right)^{-1}\cdot\Phi^T[k-1]\cdot Y_1[k-1]}_{\hat{X}[k-1]}=A\cdot\hat{X}[k-1].$$

Таким образом, имеем следующие рекуррентные соотношения:

$$\begin{cases} \hat{X}[k] = A\hat{X}[k-1] + \gamma[k-1]\cdot M[k-1]\cdot h\left(y_1[k] - h^T \cdot A \cdot \hat{X}[k-1]\right) \\ \qquad M[k-1] = AP[k-1]A^T \\ P[k-1] = M[k-1] - \gamma[k-1]\cdot M[k-1]\cdot h\cdot h^T \cdot M[k-1] \\ \qquad \gamma[k-1] = \left(1 + h^T \cdot M[k-1]\cdot h\right)^{-1} \end{cases}.$$

Эти формулы не зависят от случайных возмущений на выходе объекта, поэтому они не имеют вероятностной интерпретации. Для устранения этого негативного свойства используем ковариационную матрицу оценок МНК:

$$D\hat{X}[k-1] = \delta^2 \underbrace{\left(\Phi^T[k-1]\cdot\Phi[k-1]\right)^{-1}}_{P[k-1]} = \delta^2 P[k-1],$$

откуда:

$$P[k-1] = \frac{D\hat{X}[k-1]}{\delta^2};\quad M[k-1] = A \div P[k-1]\cdot A^T = \frac{A\cdot D\hat{X}[k-1]\cdot A^T}{\delta^2};$$

$$\gamma[k-1] = \left(1 + h^T M[k-1]h\right)^{-1} = \left(1 + h^T \cdot \frac{A\cdot D\hat{X}[k-1]\cdot A^T}{\delta^2}\cdot h\right)^{-1} =$$

$$= \delta^2 \underbrace{\left(\delta^2 + h^T \cdot A\cdot D\hat{X}[k-1]\cdot A^T \cdot h\right)^{-1}}_{\gamma_1[k-1]} = \delta^2 \cdot \gamma_1[k-1].$$

В результате получим:

$$\begin{cases} \hat{X}[k] = A\hat{X}[k-1] + \gamma_1[k-1]\cdot M[k-1]\cdot h\left(y_1[k] - h^T A\cdot \hat{X}[k-1]\right) \\ \qquad M[k-1] = \delta^{-2}\cdot AD\hat{X}[k-1]\cdot A^T \\ \dfrac{D\hat{X}[k-1]}{\delta^2} = \dfrac{AD\hat{X}[k-1]\cdot A^T}{\delta^2} - \gamma_1[k-1]\cdot \dfrac{AD\hat{X}[k-1]\cdot A^T hh^T AD\hat{X}[k-1]\cdot A^T \cdot}{\delta^2} \\ \qquad \gamma_1[k-1] = \left(\delta^2 h^T AD\hat{X}[k-1]A^T h\right)^{-1} \end{cases}$$

Эти формулы определяют дискетный фильтр Калмана в простейшей форме, то есть в отсутствии случайных возмущений V на входе объекта.