получим: $\Im^{/}(u)=x\cdot\nabla\left(tr\,\underbrace{I}_{Y}\cdot\underbrace{Q^{-1}}_{x^{-1}}\right)x^{T}=x\left[-Q^{-1}IQ^{-1}\right]x^{T}=-x\left[Q^{-1}\right]^{2}x^{T}$, откуда уравнение Эйлера для «А» критерия будет:

$$-\frac{\Im^{/}(u)}{\Im^{2}(u)}=\lambda\Leftrightarrow\frac{x(t)\cdot Q^{-1}\cdot Q^{-1}\cdot x^{T}(t)}{\left(trQ^{-1}(u)\right)^{2}}=\lambda .$$

<u>3. Е-критерий.</u> Для него $\Im(u)=\max\limits_{j}d_{j}=\max\limits_{j}d_{j}\left(Q^{-1}(u)\right)$, d_j - собственные числа матрицы $Q^{-1}(u)$. Этот критерий можно записать в другой форме:

$$\Im(u)=\max_{j}d_{j}\left(Q^{-1}(u)\right)=C_{1}\cdot Q^{-1}(u)\cdot C_{1}^{T},$$

где C_1 - вектор, который «вырезает» максимальное собственное число.

Матрица $Q^{-1}(u)$ является симметричной, поэтому для нее справедлива теорема о спектральном разложении, т.е. существует ортогональная матрица P: $P^{T}\cdot P=P\cdot P=P^{2}=Q(u)$, $P^{T}=P$, поэтому

$$\Im(u)=C_{1}\cdot Q^{-1}(u)\cdot C_{1}^{T}=C_{1}\cdot\left(P^{T}Q^{-1}(u)P\right)\cdot C_{1}^{T}=\underbrace{C_{1}\cdot P^{T}}_{D}\cdot Q^{-1}(u)\cdot\underbrace{P\cdot C_{1}^{T}}_{D^{T}}=$$

$=D\cdot Q^{-1}(u)\cdot D^{T}$, откуда с учетом замены $D=C_{1}P^{T}$ и вычислений аналогичных «С» критерию получим:

$$\Im(u)=D\cdot Q^{-1}(u)\cdot D^{T}\Rightarrow\Im^{/}(u)=-\left(D\cdot Q^{-1}(u)\cdot D^{T}\right)^{2}=-\left(C_{1}P^{T}Q^{-1}(u)x^{T}\right)^{2}.$$

Уравнение Эйлера для «Е» критерия будет иметь вид:

$$-\frac{\Im^{/}(u)}{\Im^{2}(u)}=\lambda\Leftrightarrow\frac{\left(C_{1}\cdot P^{T}\cdot Q^{-1}(u)\cdot x^{T}(t)\right)^{2}}{\left(C_{1}\cdot P^{T}\cdot Q^{-1}(u)\cdot P\cdot C_{1}^{T}\right)}=\lambda .$$

Уравнения Эйлера для других типов критериев могут быть получены аналогичным способом.

<u>Алгоритм решения НЗО по распределению измерений.</u> В НЗО неизвестной является функция $u(t)$ плотности измерений, которая является релейной с конечным числом точек переключения $t_1,..,t_k$. Поэтому основной целью решения НЗО является нахождение этих точек переключения. Они получаются в результате выполнения следующих шагов.

<u>Шаг 1.</u> Решается уравнение Эйлера:

$$x(t,\nu)=\lambda ,$$

где $x(t,\nu) = -\dfrac{\Im^{/}(u)}{\Im^2(u)}$, $\nu = (\nu_1,..,\nu_r)$, $\nu_r = \nu_r(q_{ij})$ - некоторая функция от элементов q_{ij} матрицы $Q(u)$. В результате на заданном промежутке $[0,T]$ времени измерений находятся (рис. 4.23) $t_1(\lambda,\nu),..,t_k(\lambda,\nu)$ моменты времени переключения релейной функции $u(t)$.

Шаг 2. Решается относительно λ уравнение:

$$\int\limits_0^T u(\lambda,\nu)dt = n\tau \Leftrightarrow \int\limits_0^{t_1(\lambda,\nu)} 1dt + .. + \int\limits_{t_k(\lambda,\nu)}^{T} 1dt = n\tau \Leftrightarrow t_1(\lambda,\nu) + .. + t_k(\lambda,\nu) = n\tau \quad (4.3)$$

Решением этого уравнения является: $\lambda(\nu)$. (4.4)

Шаг 3. Решается система трансцендентных уравнений $f_1,..,f_l$ относительно $\nu_1,..,\nu_l$:

$$\begin{cases} \nu_1 = f_1(\nu_1,..,\nu_l) \\ \quad\vdots \\ \nu_l = f_l(\nu_1,..,\nu_l). \end{cases}$$

В результате ее решения находится вектор $\nu^* = (\nu_1^*,..,\nu_l^*)$.

Шаг 4. Вектор ν^* подставляется в (4.4), в результате чего получается $\lambda(\nu^*)$.

Найденные ν^* и $\lambda(\nu^*)$ подставляются в $t_1(\lambda,\nu)\Big|_{\substack{\nu=\nu^* \\ \lambda=\lambda(\nu^*)}},..,t_k(\lambda,\nu)\Big|_{\substack{\nu=\nu^* \\ \lambda=\lambda(\nu^*)}}$ и из (4.3) находятся $t_1 = t_1(n,\tau,T),..,t_k = t_k(n,\tau,T)$, где n - заданное число измерений, τ - заданный шаг по времени, T - заданный промежуток измерений.

Рассмотрим алгоритм оптимизации распределения моментов измерений $t_1,..,t_k$ на заданном промежутке $[0,T]$ для простейших случаев САО.

Пример. Пусть объект управления в САО является безынерционным, $\varphi_1(t) \neq 0$ (наличие случайных возмущений на выходе объекта), $\varphi_2(t) = 0$, $\varphi_3(t) = 0$ (отсутствие вертикального и горизонтального дрейфов в зависимости $y = f(x)$), тогда выход объекта будет равен:

$$y(t) = \beta_1 \cdot x_1(t) + \varphi_1(t),$$

$t \in [0, T = n\tau]$, $\beta_1 = f(x_i + g)$, $x_1(t) = 1$.

Необходимо найти оптимальное распределение моментов измерений $\{t_i\}$ на промежутке времени $[0,T]$ при нахождении оценки $\widehat{\beta_1}$ по МНК с использованием «С» критерия, который обеспечивает:

$$\begin{cases} \min\limits_{\{t_i\}} CD\widehat{\beta}_1 C^T \\ ограничения, \end{cases}$$

где C - заданный вектор.

Переходим к НЗО для этого критерий:

$$\begin{cases} \min\limits_{u} \Im^{-1}(u) \\ ограничения, \end{cases}$$

где u - плотность измерений, тогда оптимальную функцию $u(t)$ можно получить аналитическим способом в соответствии с алгоритмом решения НЗО:

$$-\frac{\Im^{/}(u)}{\Im^2(u)} = \lambda \Leftrightarrow \frac{\left(C \cdot Q^{-1}(u) \cdot x^T(t)\right)^2}{\left(C \cdot Q^{-1}(u) \cdot C^T\right)^2} = \lambda .$$

Для модели процесса $y(t) = \beta_1 \cdot 1 + \varphi_1$ имеем $x(t) = 1$ и вектор C соответственно: $C = 1$, поэтому в этом случае уравнение Эйлера будет иметь вид (рис. 4.24):

$$\left.\frac{\left(C \cdot Q^{-1}(u) \cdot x^T(t)\right)^2}{\left(C \cdot Q^{-1}(u) \cdot C^T\right)^2}\right|_{\substack{x(t)=1 \\ C=1}} = \lambda \Leftrightarrow \underbrace{\frac{\cancel{\left(1 \cdot Q^{-1}(u) \cdot 1\right)^2}}{\cancel{\left(1 \cdot Q^{-1}(u) \cdot 1\right)^2}}}_{\lambda = const} = \lambda \Leftrightarrow \delta\Im_1 = \delta\Im + \lambda\big|_{\delta\Im=\lambda} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\delta\Im_1 = 0, \ \forall t \in [0, T],$$

откуда: $\int\limits_0^T u(t)\,dt\Big|_{u(t)=1} = n\tau \Leftrightarrow \int\limits_0^T 1dt = n\tau \Rightarrow T = n\tau \Rightarrow \tau = \dfrac{T}{n}$.

Это означает, что на заданном промежутке $[0, T = n\tau]$ функция плотности $u(t) = 1$, т.е. она не имеет точек переключения, поэтому оптимальной стратегии, обеспечивающей $\min\limits_{\{t_i\}} D\widehat{\beta}$, является равномерное распределение измерений с шагом по времени $\tau = \dfrac{T}{n}$, где T, n - заданные величины. Таким образом, при наличии $\varphi_1(t)$ типа «белого шума», для которого время корреляции $\tau_k = 0$, частота $f = \tau^{-1} = nT^{-1}$ съема измерений $y_1, .., y_n$ с выхода объекта должна быть максимально возможной, что за счет увеличения числа n измерений обеспечивает максимум вероятности P правильного шага для САО и увеличивает ее помехозащищенность.

Пример. Пусть объект управления в САО является типа Н-Л, где линейная часть описывается апериодическим элементом с известной постоянной времени T. Полагается, что $\varphi_1(t) \neq 0$, $\varphi_2(t) = 0$, $\varphi_3(t) = 0$. Фильтрация $\varphi_1(t)$ производится по МНК, тогда имеем (рис. 4.7 а,б):

$$z^+(t) = \underbrace{f(x_i + g)}_{\beta_1} \underbrace{-\left[f(x_i + g) - f(x_i)\right]}_{\beta_2} e^{-\frac{t}{T}} + \varphi_1(t),\ t \in [0, n\tau = t_1],$$

где n - заданное число измерений, τ - заданный шаг по времени.

Оценка $\widehat{\beta_1}$ неизвестного параметра $\beta_1 = f(x_i + g)$ по МНК модели $z^+(t) = \beta_1 x_1(t) + \beta_2 x_2(t) + \varphi_1(t)$, $x_1(t) = 1$, $x_2(t) = e^{-\frac{t}{T}}$ равна:

$$\widehat{\beta_1} = (1,0) \cdot \begin{pmatrix} \widehat{\beta_1} \\ \widehat{\beta_2} \end{pmatrix} = (1,0) \cdot \left(X^T X\right)^{-1} X^T Z^+ = (1,0) \begin{pmatrix} (x_1, x_1) & (x_1, x_2) \\ (x_2, x_1) & (x_2, x_2) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} (x_1, z^+) \\ (x_2, z^+) \end{pmatrix},$$

где $(\cdot,\cdot)$ - скалярное произведение, $Z^+ = \left(z_1^+, .., z_n^+\right)$ - вектор измерений.

В этих условиях найдем функцию $u(t)$ плотности измерений из решения НЗО <u>для алгоритма с прогнозированием (вектор $C = (1,0)$ - «С» оптимальность):</u>

$$x_{i+1} = x_i + a \cdot sign\left\{ \underbrace{C\left(X^T X\right)^{-1} X^T Z^+}_{\widehat{f}(x_i + g)} - \underbrace{C\left(X^T X\right)^{-1} X^T Z^-}_{\widehat{f}(x_i - g)} \right\}.$$

В соответствии с алгоритмом решения НЗО имеем следующую последовательность шагов.

<u>Шаг 1.</u> Решается уравнение Эйлера для «С» критерия оптимизации:

$$-\frac{\Im'(u)}{\Im^2(u)} = \lambda \Leftrightarrow \frac{\left(C \cdot Q^{-1}(u) \cdot x^T(t)\right)^2}{\left(C \cdot Q^{-1}(u) \cdot C^T\right)^2} = \lambda .$$

Здесь $C = (1,0)$, $x(t) = \left(x_1(t), x_2(t)\right)\Big|_{\substack{x_1 = 1 \\ x_2 = e^{-\frac{t}{T}}}} = \left(1, e^{-\frac{t}{T}}\right)$ - вектор базисных функций модели процесса,

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \overbrace{\frac{q_{22}}{\Delta}}^{p_{11}} & \overbrace{-\frac{q_{21}}{\Delta}}^{p_{12}} \\ \underbrace{-\frac{q_{12}}{\Delta}}_{p_{21}} & \underbrace{\frac{q_{11}}{\Delta}}_{p_{22}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} = P$$ - матричный

функционал.

В результате получим:

$$\frac{\left[\overbrace{(1,0)}^{C}\cdot\overbrace{\begin{pmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{21} & p_{22}\end{pmatrix}}^{Q^{-1}}\cdot\overbrace{\begin{pmatrix}1\\ e^{-\frac{t}{T}}\end{pmatrix}}^{x^T}\right]^2}{\left[\underbrace{(1,0)}_{C}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{21} & p_{22}\end{pmatrix}}_{Q^{-1}}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}}_{C^T}\right]^2}=\lambda\Leftrightarrow\frac{\left[(1,0)\cdot\begin{pmatrix}p_{11} & p_{12}\cdot e^{-\frac{t}{T}}\\ p_{21} & p_{22}\cdot e^{-\frac{t}{T}}\end{pmatrix}\right]^2}{\left[(1,0)\begin{pmatrix}p_{11}\\ p_{21}\end{pmatrix}\right]^2}=\lambda\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(p_{11}+p_{12}\cdot e^{-\frac{t}{T}}\right)^2}{(p_{11})^2}=\lambda\Leftrightarrow\left.\left(1+\frac{p_{12}}{p_{11}}\cdot e^{-\frac{t}{T}}\right)^2\right|_{\frac{p_{12}}{p_{11}}=\nu}=\lambda\Leftrightarrow\left(1+\nu\cdot e^{-\frac{t}{T}}\right)^2=\lambda\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\mu(t,\nu)=\lambda\,,\ \mu(t,\nu)=\left(1+\nu\cdot e^{-\frac{t}{T}}\right)^2.$$

Решаем уравнение Эйлера графическим способом. Для этого найдем характерные точки зависимости $\mu(t,\nu)=\left(1+\nu\cdot e^{-\frac{t}{T}}\right)^2$.

Имеем:

1. $\mu(t=0,\nu)=\left.\left(1+\nu\cdot e^{-\frac{t}{T}}\right)^2\right|_{t=0}=(1+\nu)^2$;

2. $\mu(t\to+\infty,\nu)=\left.\left(1+\nu\cdot e^{-\frac{t}{T}}\right)^2\right|_{t\to+\infty}\to 1$;

3. Экстремум $\mu(t,\nu)$ находится из уравнения:

$$\mu_t^{/}=0\Leftrightarrow\left\{\left(1+\nu\cdot e^{-\frac{t}{T}}\right)^2\right\}_t^{/}=2\left(1+\nu\cdot e^{-\frac{t}{T}}\right)\nu\left(-\frac{1}{T}\right)e^{-\frac{t}{T}}=0\Leftrightarrow$$

$$e^{-\frac{t}{T}}=-\frac{1}{\nu}\Leftrightarrow t_э=T\ln(-\nu),\ \nu=\frac{p_{12}}{p_{11}}<-1.$$

Найдем тип экстремума $\mu(t,\nu)$:

$$\mu_t^{//}=\left\{-\frac{2\nu}{T}\cdot e^{-\frac{t}{T}}-\frac{2\nu^2}{T}\cdot e^{-\frac{2t}{T}}\right\}_t^{/}=\frac{2\nu}{T^2}\cdot e^{-\frac{t}{T}}\cdot\left[1+2\nu e^{-\frac{t}{T}}\right]\Bigg|_{t=t_э}=\frac{2}{T^2}(1+2)>0,$$

поэтому $t_э=T\ln(-\nu)$ - это минимум функции $\mu(t,\nu)$, кроме этого,

$$\mu(t=t_э,\nu)=\left(1+\nu\cdot e^{-\frac{t}{T}}\right)^2\Bigg|_{t=t_э=T\ln(-\nu)}=0.$$

4. Точку перегиба $\mu(t,\nu)$ находим из уравнения:

$$\mu_t^{//}=0\Leftrightarrow\frac{2\nu}{T^2}\cdot e^{-\frac{t}{T}}\cdot\left[1+2\nu e^{-\frac{t}{T}}\right]=0\Leftrightarrow t_n=T\ln(-2\nu).$$

С учетом результатов 1-4 имеем график функции $\mu(t,\nu)$ (рис. 4.25). Найдем моменты t переключения функции $u(t)$. Для этого решаем уравнение:

$$\mu(t,\nu)=\lambda\Leftrightarrow\left(1+\nu\cdot e^{-\frac{t}{T}}\right)^2=\lambda\Rightarrow t_1=-T\ln\frac{-1+\sqrt{\lambda}}{\nu},\ t_2=-T\ln\frac{-1-\sqrt{\lambda}}{\nu}.$$

Непосредственно из рисунка следует, что $t_1<t_2$.

<u>Шаг 2.</u> Решается относительно λ уравнение:

$$\int_0^{T^*}u(t)dt=n\tau\Leftrightarrow\int_0^{t_1(\lambda,\nu)}1dt+\int_{t_1(\lambda,\nu)}^{t_2(\lambda,\nu)}1dt+\int_{t_2(\lambda,\nu)}^{T^*}1dt=n\tau\Leftrightarrow t_1(\lambda,\nu)+T^*-t_2(\lambda,\nu)=n\tau\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow-T\ln\frac{-1+\sqrt{\lambda}}{\nu}+\left[T^*-\left(-T\ln\frac{-1-\sqrt{\lambda}}{\nu}\right)\right]=n\tau\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ln\frac{-1-\sqrt{\lambda}}{-1+\sqrt{\lambda}}=-\frac{T^*-n\tau}{T}\Leftrightarrow\sqrt{\lambda}=\frac{e^{-\frac{T^*-n\tau}{T}}-1}{e^{-\frac{T^*-n\tau}{T}}+1},$$

откуда: $t_1=-T\ln\dfrac{-1+\dfrac{e^{-\frac{T^*-n\tau}{T}}-1}{e^{-\frac{T^*-n\tau}{T}}+1}}{\nu}$, $t_2=-T\ln\dfrac{-1-\dfrac{e^{-\frac{T^*-n\tau}{T}}-1}{e^{-\frac{T^*-n\tau}{T}}+1}}{\nu}$.

<u>Шаг 3.</u> Получим уравнение для нахождения ν: $\nu=f(\nu)$.

Имеем: $\nu = \dfrac{p_{12}}{p_{11}}$, где p_{11}, p_{12} - элементы матричного функционала

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overbrace{\dfrac{q_{22}}{\Delta}}^{p_{11}} & \overbrace{-\dfrac{q_{21}}{\Delta}}^{p_{12}} \\ \underbrace{-\dfrac{q_{12}}{\Delta}}_{p_{21}} & \underbrace{\dfrac{q_{11}}{\Delta}}_{p_{22}} \end{pmatrix},\ Q^{-1} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}^{-1},\ P = Q^{-1}, \text{ откуда}$$

$$\nu = \frac{p_{12}}{p_{11}} = \frac{-q_{21}}{\Delta} \cdot \frac{\Delta}{q_{22}} = -\frac{q_{21}}{q_{22}}.$$

Найдем q_{21} и q_{22}:

$$q_{21} = \int_0^{T^*} x_1(t) x_2(t) u(t) dt \Bigg|_{\substack{x_1 = 1 \\ x_2 = e^{-\frac{t}{T}}}} = \int_0^{T^*} e^{-\frac{t}{T}} u(t) dt = \int_0^{t_1(\nu)} e^{-\frac{t}{T}} \cdot 1 dt + \int_{t_1(\nu)}^{T^*} e^{-\frac{t}{T}} \cdot 1 dt =$$

$$= -T \left[e^{-\frac{t_1(\nu)}{T}} - 1 + e^{-\frac{T^*}{T}} - e^{-\frac{t_2(\nu)}{T}} \right],$$

$$q_{22} = \int_0^{T^*} x_2(t) x_2(t) u(t) dt \Bigg|_{x_2 = e^{-\frac{t}{T}}} = \int_0^{T^*} e^{-\frac{2t}{T}} u(t) dt = \int_0^{t_1(\nu)} e^{-\frac{2t}{T}} \cdot 1 dt + \int_{t_1(\nu)}^{T^*} e^{-\frac{2t}{T}} \cdot 1 dt =$$

$$= -0.5T \left[e^{-\frac{2t_1(\nu)}{T}} - 1 + e^{-\frac{2T^*}{T}} - e^{-\frac{2t_2(\nu)}{T}} \right].$$

В результате получим:

$$\nu = \frac{p_{12}}{p_{11}} = -\frac{q_{21}}{q_{22}} = -2 \frac{\left[e^{-\frac{t_1(\nu)}{T}} - 1 + e^{-\frac{T^*}{T}} - e^{-\frac{t_2(\nu)}{T}} \right]}{\left[e^{-\frac{2t_1(\nu)}{T}} - 1 + e^{-\frac{2T^*}{T}} - e^{-\frac{2t_2(\nu)}{T}} \right]}.$$

Подставим полученные ранее выражения для $t_1(\nu)$, $t_2(\nu)$, тогда после преобразований будем иметь квадратное уравнение относительно ν:

$$\frac{2(2a - b\nu)}{4a + c\nu^2} = 1,\ a = \frac{e^{-\frac{T^* - n\tau}{T}} - 1}{e^{-\frac{T^* - n\tau}{T}} + 1},\ b = 1 - e^{-\frac{T^*}{T}},\ c = 1 - e^{-\frac{2T^*}{T}}, \text{ откуда:}$$

$$4a-2bv=4a+cv^2 \Rightarrow v^*=\frac{-2b}{c}=\frac{-2\left(1-e^{-\frac{T^*}{T}}\right)}{1-e^{-\frac{2T^*}{T}}}=-2\left(1+e^{-\frac{T^*}{T}}\right)^{-1}.$$

Таким образом: $v^*=-2\left(1+e^{-\frac{T^*}{T}}\right)^{-1}$, v^* - решение уравнения $v=f(v)$.

<u>Шаг 4.</u> Подставим v^* в $t_1(v)$, $t_2(v)$ (шаг 2) и получим:

$$t_1\left(v=v^*\right)=-T\ln\left[\frac{1+e^{-\frac{T^*}{T}}}{1+e^{-\frac{T^*-n\tau}{T}}}\right],\ t_2\left(v=v^*\right)=T^*-n\tau-T\ln\left(1+e^{-\frac{T^*}{T}}\right).$$

Таким образом, функция $u(t)$ плотности измерений НЗО для алгоритма САО с прогнозированием имеет две точки переключения t_1, t_2:

$$u(t)=\begin{cases}1, & 0\le t\le t_1 \ \text{или}\ t_2\le t\le T^* \\ 0, & t_1<t<t_2.\end{cases}$$

Это означает, что оптимально проводимые измерения должны состоять из двух групп измерений $n_1=\left[t_1\cdot\tau^{-1}\right]$, $[\cdot]$ - целая часть, $n_2=n-n_1$.

<u>Числовой пример.</u> Пусть $n=40$, $T=T^*=10[c]$, $\tau=10^{-2}[c]$, тогда $t_1=10^{-1}[c]$, $t_2=9.7[c]$, откуда: $n_1=\left[t_1\cdot\tau^{-1}\right]=10$, $n_2=n-n_1=30$.

Оценим выигрыш относительно вероятности q логичного шага для равномерных отсчетов q_p и оптимальных отсчетов $q_{опт}$ при следующих исходных данных [36]:

- $y=f(x)=|x|$,
- $\varphi_1(t)\sim N\left(0,\sigma^2\right)$,
- $n=15$, $T=T^*=10[c]$, $\tau=10^{-2}[c]$,

тогда: $q_p\simeq 0.22$, $q_{опт}\simeq 0.10$.

Эти результаты показывают, что оптимальное распределение измерений существенно повышает помехозащищенность САО.

Расчеты, приведенные выше, по оптимизации измерений для алгоритма с прогнозированием могут быть реализованы также для алгоритма с разрывом производной. В этом случае в «С» критерии оптимизации необходимо положить $C=(0,1)$. Как показывают расчеты, проводимые измерения должны состоять из двух групп измерений n_1, n_2, $n = n_1 + n_2$, проводимых с наибольшей возможной частотой, соответственно в начале и в конце промежутка наблюдений $\left[0, T^*\right]$.

При наличии эквивалентного вертикального дрейфа $(\varphi_2 \neq 0)$, когда горизонтальный дрейф $(\varphi_3 \neq 0)$ приведен к выходу нелинейной части объекта, с моделью $\varphi_2(t) = \beta_3 \cdot t$ эквивалентного вертикального дрейфа будем иметь: $z^+(t) = (\mathrm{B}, x) + \varphi_1(t)$, $t \in \left[0, T^*\right]$, $(\cdot,\cdot)$ - скалярное произведение,

$$\mathrm{B} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3),\ x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) = \left(1, e^{-\frac{t}{T}}, t\right),\ \beta_1 = f(x_i + g).$$

В этом случае «С» критерий оптимизации для алгоритма с прогнозированием $C = (1,0,1)$ обеспечивает минимизацию дисперсий $D\widehat{f}(x_i + g)$ и $D\widehat{\beta_3}$. Уравнение Эйлера будет иметь вид (шаг 1):

$$-\frac{\Im^{/}(u)}{\Im^2(u)} = \lambda \Leftrightarrow \frac{\left(C \cdot Q^{-1}(u) \cdot x^T(t)\right)^2}{\left(C \cdot Q^{-1}(u) \cdot C^T\right)^2} = \lambda \Leftrightarrow \frac{\left(C \cdot P \cdot x^T(t)\right)^2}{\left(C \cdot P \cdot C^T\right)^2} = \lambda \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left[(1,0,1) \cdot \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ e^{-\frac{t}{T}} \\ t \end{pmatrix}\right]^2}{\left[(1,0,1) \cdot \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]^2} = \lambda \Leftrightarrow \underbrace{\left(\nu_1 \cdot 1 + \nu_2 \cdot e^{-\frac{t}{T}} + \nu_3 \cdot t\right)^2}_{\mu(t, \nu_1, \nu_2, \nu_3)} = \lambda,$$

$$\nu_1 = (p_{11} + p_{13}) \cdot p_*^{-1},\ \nu_2 = (p_{12} + p_{23}) \cdot p_*^{-1},\ \nu_3 = (p_{13} + p_{33}) \cdot p_*^{-1},$$

$$p_* = p_{11} + 2p_{13} + p_{33}.$$

Для зависимости $\mu(t, \nu_1, \nu_2, \nu_3)$ находим характерные точки $\mu\big|_{t=0}$, $\mu\big|_{t \to +\infty}$, $\mu_t^{/} = 0$, $\mu_t^{//} = 0$ и далее решаем уравнение $\mu(t, \nu_1, \nu_2, \nu_3) = \lambda$ графическим способом. В результате (шаг 2-4) для функции $u(t)$ плотности измерений получим четыре точки переключения t_1, t_2, t_3, t_4:

$$u(t) = \begin{cases} 1,\ 0 \le t \le t_1 \ \textit{или}\ t_2 \le t \le t_3 \ \textit{или}\ t_4 \le t \le T^* \\ \quad 0,\ t_1 < t < t_2 \textit{или}\ t_3 \le t \le t_4. \end{cases}$$

Это означает, что оптимально проводимые измерения должны состоять из трех групп измерений. Две из них проводятся на концах промежутка $\left[0, T^*\right]$, а другая группа – в его центральной части.

<u>Время корреляции.</u> Ранее в ДЗО одно из условий в ограничениях имело вид:

$$t_{i+1} - t_i \geq \tau > \tau_\kappa,$$

где τ - шаг по времени, τ_κ - время корреляции «помехи» $\varphi_1(t)$ на выходе объекта.

Рассмотрим один из подходов в оценке величины τ_κ:

$$\tau_\kappa = \int_0^\infty \left|S_{\varphi_1}(\tau)\right| d\tau,$$

где $S_{\varphi_1}(\tau)$ - нормализованная корреляционная функция случайного процесса $\varphi_1(t)$, $\tau = t - t_*$, t и t_* - отсчеты процесса.

Нормализованная корреляционная функция:

$$S_{\varphi_1}(\tau) = \frac{K_{\varphi_1}(\tau)}{K_{\varphi_1}(\tau = 0)},$$

где $K_{\varphi_1}(\tau = 0) = D_{\varphi_1}$ - дисперсия процесса, $K_{\varphi_1}(\tau)$ - корреляционная функция: $K_{\varphi_1}(\tau) = E\left\{\left[\varphi_1(t) - E\varphi_1(t)\right] \cdot \left[\varphi_1(t_*) - E\varphi_1(t)\right]\right\}$, E - символ математического ожидания.

Рассмотрим несколько примеров расчета величины τ_κ.

<u>Пример.</u> Для стационарного случайного процесса $\varphi_1(t)$ имеем:

$$S_{\varphi_1}(\tau) = \begin{cases} 1 - \alpha|\tau|, \ \tau \in \left(-\alpha^{-1}, \alpha^{-1}\right) \\ 0, \ \tau \notin \left(-\alpha^{-1}, \alpha^{-1}\right), \end{cases}$$

$\alpha > 0$ - параметр процесса (рис. 4.26), тогда величина τ_κ равна:

$$\tau_\kappa = \int_0^\infty (1 - \alpha\tau) d\tau = 0.5\alpha^{-1}.$$

При наличии условия $\tau > \tau_\kappa$ имеем отсчеты процесса $\varphi_1(t)$ в моменты t и t_* без корреляции.

В частности: $\left.\begin{matrix} \tau_\kappa \to 0 \\ \alpha \to \infty \end{matrix}\right| \Rightarrow \varphi_1(t)$ - «белый шум».

<u>Пример.</u> Для стационарного случайного процесса $\varphi_1(t)$ имеем нормализованную спектральную плотность:

$$S^*_{\varphi_1}(\omega) = S_{\varphi_1}(\omega) \cdot D^{-1}_{\varphi_1} = \frac{1}{2\lambda\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4\lambda^2}},$$

$\lambda > 0$ - параметр.

Нормализованная корреляционная функция $S_{\varphi_1}(\tau)$:

$$S_{\varphi_1}(\tau) = F^{-1}\left[S_{\varphi_1}^{*}(\omega)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\varphi_1}(\omega)\cdot e^{i\omega\tau}d\tau = \frac{1}{2\lambda\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\omega^2}{4\lambda^2}+2\omega\left(\frac{i\tau}{2}\right)}d\omega,$$

где F^{-1} - обратное преобразование Фурье. Для вычисления $\int_{-\infty}^{\infty}(\cdot)d\omega$ используем известную формулу: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-Ax^2 \pm 2Bx + C}dx = \sqrt{\frac{\pi}{A}}\cdot e^{-\frac{AC-B^2}{A}}$, $A > 0$ и $i^2 = -1$, тогда получим: $S_{\varphi_1}(\tau) = e^{-\lambda^2\tau^2}$.

Величина времени корреляции: $\tau_к = \int_0^{\infty} e^{-\lambda^2\tau^2}d\tau = \frac{\sqrt{\pi}}{\lambda}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi D^2}}\int_0^{\infty} e^{-\frac{\tau^2}{2D^2}}d\tau\right]$, $D = \frac{1}{\sqrt{2}\lambda}$.

Для плотности нормального распределения имеем:

$$N(E\tau, D\tau) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi(D\tau)^2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(\tau - E\tau)^2}{2(D\tau)^2}}d\tau = 1,$$

поэтому: $\frac{1}{\sqrt{2\pi D^2}}\int_0^{\infty} e^{-\frac{\tau^2}{2D^2}}d\tau = \frac{1}{2}$, откуда (рис. 4.27): $\tau_к = \frac{\sqrt{\pi}}{2\lambda}$.

В частности: $\left.\begin{matrix}\tau_к \to 0\\ \lambda \to \infty\end{matrix}\right| \Rightarrow \varphi_1(t)$ - «белый шум».

Пример. Имеем апериодический элемент с передаточной функцией (рис. 4.28): $W(p) = \frac{1}{Tp+1}$. На его входе имеем стационарный случайный процесс типа «белого шума»: $S_{вх}(\omega) = a = const$.

Необходимо найти $\tau_к$ на выходе звена. Из теории случайных процессов известно: $S_{вых}(\omega) = S_{вх}(\omega)\cdot K^2(\omega)$, где $K(\omega)$ - амплитудно-частотная характеристика звена: $K^2(\omega) = \left|K(i\omega)\right|^2 = \left.\left|W(p)\right|^2\right|_{p=i\omega} = \left|\frac{1}{1+T\omega}\right|^2 = \frac{1}{1+(T\omega)^2}$.

Поэтому $S_{вых}(\omega) = S_{вх}(\omega)\cdot K^2(\omega) = \frac{a}{1+(T\omega)^2}$.

Корреляционная функция выхода:

$$K_{вых}(\tau)=F^{-1}\left[S_{вых}(\omega)\right]=\int\limits_{-\infty}^{\infty}S_{вых}(\omega)\cdot e^{i\omega\tau}d\omega=a\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega\tau}}{1+(T\omega)^2}d\omega \overset{\substack{\text{формула Эйлера}\\ \downarrow}}{=}$$

$$=a\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\omega\tau}{1+(T\omega)^2}d\omega+\underbrace{ia\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\omega\tau}{1+(T\omega)^2}d\omega}_{\to 0,\ \text{нечетная функция}}=a\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\omega\tau}{1+\Big(\underbrace{T\omega}_{x}\Big)^2}d\omega \underset{\substack{\uparrow\\ \text{четная функция}}}{=}$$

$$=\frac{2a}{T}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\cos\left(\frac{\tau}{T}x\right)}{1+x^2}dx.$$

Известно, что $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\cos(px)}{q^2+x^2}dx=\frac{\pi}{2q}e^{-|pq|}$, поэтому:

$$K_{вых}(\tau)=\frac{2a}{T}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\cos\left(\frac{\tau}{T}x\right)}{1+x^2}dx=\frac{\pi a}{T}e^{-\frac{|\tau|}{T}}.$$

Дисперсия случайного процесса на выходе равна:

$$D_{вых}=K_{вых}(\tau=0)=\left.\frac{\pi a}{T}e^{-\frac{|\tau|}{T}}\right|_{\tau=0}=\frac{\pi a}{T}.$$

Нормализованная корреляционная функция на выходе:

$$S_{вых}(\tau)=\frac{K_{вых}(\tau)}{K_{вых}(\tau=0)}=\frac{\frac{\pi a}{T}e^{-\frac{|\tau|}{T}}}{\frac{\pi a}{T}}=e^{-\frac{|\tau|}{T}}.$$

Время корреляции равно: $\tau_к=\int\limits_{0}^{\infty}e^{-\frac{\tau}{T}}d\tau=Te^{-\frac{\tau}{T}}\Big|_{0}^{\infty}=T$, очевидно, что при

$\left.\begin{array}{l}\tau_к\to 0\\ T\to 0\end{array}\right|\Rightarrow\varphi_{вых}(t)$ - «белый шум».

Возможны также иные способы определения $\tau_к$ [37]. Например,

1. $\tau_к^{(1)}=\left|S_{\varphi_1}(\tau)\right|\le\varepsilon$, ε - заданное число;
2. $\tau_к^{(2)}=\int\limits_{0}^{\infty}\left|S_{\varphi_1}(\tau)\right|d\tau$;
3. $\tau_к^{(3)}=\int\limits_{0}^{\infty}\left[S_{\varphi_1}(\tau)\right]^2d\tau$;

4. $\tau_{\kappa}^{(4)} = \dfrac{\int\limits_0^{\infty} \tau \cdot S_{\varphi_1}(\tau) d\tau}{\int\limits_0^{\infty} S_{\varphi_1}(\tau) d\tau}$.

Для нестационарных случайных процессов $\varphi_1^N(t)$ можно ввести аналогичные критерии времени корреляции τ_{κ}^N.

Например, $\tau_{\kappa}^N = \int\limits_0^{\infty} S_{\varphi_1^N}(t, t+\tau) d\tau$, τ_{κ}^N - время корреляции в нестационарном случае.

4.4. Методы проверки четких и нечетких статических гипотез уменьшения влияния случайных возмущений.

4.4.1. Поисковые алгоритмы САО как эквивалентная задача проверки статических гипотез. Для этого используем графические построения (рис. 4.29). Пусть для простоты имеем безынерционный объект, алгоритм поиска – парные пробы (a - рабочий шаг, $\pm g$ - пробные смещения), характеристика объекта кусочно-линейного типа ($y = -|x - x_*| + y_*$).

Первоначально положим, что рабочая точка A_1 находится на левой ветви, тогда фаза сигнала на выходе будет такой же как фаза на входе, поэтому $Ef\left(y^+\right) \geq Ef\left(y^-\right)$ (рис. 4.30 а, б).

Наоборот, если рабочая точка A_2 находится на правой ветви, то фаза сигнала на выходе будет противоположна фазе его входного сигнала, поэтому $Ef\left(y^+\right) < Ef\left(y^-\right)$ (рис. 4.31 а, б).

Таким образом, для определения типа ветви характеристики необходимо сравнивать фазы сигналов на входе и выходе объекта, что эквивалентно проверке двух конкурирующих гипотез:

$H_0 : Ef\left(y^+\right) \geq Ef\left(y^-\right)$ - рабочая точка находится на левой ветви,

$H_1 : Ef\left(y^+\right) < Ef\left(y^-\right)$ - рабочая точка находится на правой ветви.

4.4.2. Общие положения проверки гипотез. Логическая схема состоит в следующем: формулируются гипотезы H_0 и H_1; затем производится эксперимент «Э» - получение вектора измерений $y = \left(y_1, .., y_n\right)$; в результате обработки этих измерений появляется событие A или $B = \overline{A}$, если появляется A, то принимается гипотеза H_0^+, если появляется событие B, то принимается гипотеза H_1^+. В символической форме:

$$\left.\begin{matrix} H_0 \\ H_1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow Э \sim y_1,..,y_n \Rightarrow \begin{matrix} A \Rightarrow H_0^+ \Leftrightarrow H_1^- \\ B = \overline{A} \Rightarrow H_1^+ \Leftrightarrow H_0^-. \end{matrix}$$

В соответствии с формулой Байеса:

$$p(H_0 \mid A) = p(H_0) \cdot p(A \mid H_0),\ p(H_1 \mid A) = p(H_1) \cdot p(A \mid H_1)$$

имеем отношение вероятностей при $A = y = (y_1,..,y_n)$:

$$\frac{p(H_0 \mid y)}{p(H_1 \mid y)} = \frac{p(H_0) \cdot p(y \mid H_0)}{p(H_1) \cdot p(y \mid H_1)} = \frac{p(H_0) \cdot \overbrace{f(y \mid H_0)dy}^{p(y|H_0)}}{p(H_1) \cdot \underbrace{f(y \mid H_1)dy}_{p(y|H_1)}} =$$

$$= \frac{\overbrace{\dfrac{f(y \mid H_0)}{f(y \mid H_1)}}^{\Lambda}}{\underbrace{\dfrac{p(H_1)}{p(H_0)}}_{\Lambda_0}} \Leftrightarrow \frac{p(H_0 \mid y)}{p(H_1 \mid y)} = \frac{\Lambda}{\Lambda_0},$$

где Λ - принято называть отношение правдоподобия, Λ_0 - порог.

Пусть $\dfrac{p(H_0 \mid y)}{p(H_1 \mid y)} \geq 1 \Leftrightarrow \dfrac{\Lambda}{\Lambda_0} \geq 1 \Leftrightarrow \Lambda \geq \Lambda_0 \Leftrightarrow \underbrace{\dfrac{f(y \mid H_0)}{f(y \mid H_1)}}_{\Lambda} \geq \Lambda_0 \Rightarrow H_0^+ \left(H_1^-\right)$,

если $\dfrac{p(H_0 \mid y)}{p(H_1 \mid y)} < 1 \Leftrightarrow \dfrac{\Lambda}{\Lambda_0} < 1 \Leftrightarrow \Lambda < \Lambda_0 \Leftrightarrow \underbrace{\dfrac{f(y \mid H_0)}{f(y \mid H_1)}}_{\Lambda} < \Lambda_0 \Rightarrow H_1^+ \left(H_0^-\right)$.

Полученные соотношения представлены на рис. 4.32. На нем ошибка α первого рода: $\alpha(\Lambda_0) = p(H_1 \mid H_0) = \int\limits_{\Lambda_0}^{\infty} f(y \mid H_1)dy$,

ошибка β второго рода: $\beta(\Lambda_0) = p(H_0 \mid H_1) = \int\limits_{-\infty}^{\Lambda_0} f(y \mid H_0)dy$.

Эти ошибки в терминах САО изображены на рис.4.33.

4.4.3. Критерий Неймана-Пирсона проверки гипотез. Одна из основных задач принятия гипотез состоит в выборе величины порога Λ_0, с которым сравнивается отношение правдоподобия Λ. Как видно из рис. 4.32 при уменьшении $\Lambda_0(\Lambda_0 \downarrow)$ увеличивается $\alpha(\alpha \uparrow)$, но при этом уменьшается $\beta(\beta \downarrow)$ и, наоборот, при $\Lambda_0 \uparrow$ следует, $\alpha \downarrow$, а $\beta \uparrow$.

В критерии Неймана-Пирсона величина Λ_0 выбирается из решения оптимизационной задачи: $\min\limits_{\Lambda_0}\beta\left(\Lambda_0\right)$, при наличии условия: $\alpha\left(\Lambda_0\right)\le\varepsilon$, ε - заданное число.

Как известно из анализа такая задача решается с помощью неопределенных множителей Лагранжа: $F\left(\Lambda_0\right)=\beta\left(\Lambda_0\right)+k\alpha\left(\Lambda_0\right)$, где k - неопределенный множитель.

Решаем уравнение: $\dfrac{\partial F\left(\Lambda_0\right)}{\partial\Lambda_0}=0\Leftrightarrow\dfrac{\partial}{\partial\Lambda_0}\left[\beta\left(\Lambda_0\right)+k\alpha\left(\Lambda_0\right)\right]=0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\frac{\partial}{\partial\Lambda_0}\underbrace{\left[\int\limits_{-\infty}^{\Lambda_0}f\left(y\,|\,H_0\right)dy\right]}_{\beta\left(\Lambda_0\right)}+k\frac{\partial}{\partial\Lambda_0}\underbrace{\left[\int\limits_{\Lambda_0}^{\infty}f\left(y\,|\,H_1\right)dy\right]}_{\alpha\left(\Lambda_0\right)}=0. \qquad (4.4)$$

Из анализа известна формула:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\int\limits_{y_2(x)}^{y_1(x)}f\left(y,x\right)dy\right)=\int\limits_{y_2(x)}^{y_1(x)}\frac{\partial f\left(y,x\right)}{\partial x}dy+\frac{\partial y_1\left(x\right)}{\partial x}\cdot f\left(y,x\right)\Big|_{y=y_1}-\frac{\partial y_2\left(x\right)}{\partial x}\cdot f\left(y,x\right)\Big|_{y=y_2}$$

Применим ее к (4.4):

$$\frac{\partial}{\partial\Lambda_0}\left(\int\limits_{-\infty}^{\Lambda_0}f\left(y\,|\,H_0\right)dy\right)=\int\limits_{-\infty}^{\Lambda_0}\underbrace{\frac{\partial f\left(y\,|\,H_0\right)}{\partial\Lambda_0}}_{\substack{\to 0,\ f\left(y|H_0\right)\ \text{не}\\ \text{зависит от}\ \Lambda_0}}dy+\underbrace{\frac{\partial\Lambda_0}{\partial\Lambda_0}}_{\to 1}\cdot f\left(y\,|\,H_0\right)\Big|_{y=\Lambda_0}-$$

$$-\underbrace{\frac{\partial\left(\Lambda_0=-\infty\right)}{\partial\Lambda_0}}_{\to 0}\cdot f\left(y\,|\,H_0\right)\Big|_{y=\Lambda_0}=f\left(\Lambda_0\,|\,H_0\right);$$

$$\frac{\partial}{\partial\Lambda_0}\left(\int\limits_{\Lambda_0}^{\infty}f\left(y\,|\,H_1\right)dy\right)=-f\left(\Lambda_0\,|\,H_1\right).$$

Подставим эти выражения в (4.4):

$$\frac{\partial F\left(\Lambda_0\right)}{\partial\Lambda_0}=0\Leftrightarrow f\left(\Lambda_0\,|\,H_0\right)-k\cdot f\left(\Lambda_0\,|\,H_1\right)=0\Rightarrow k=\frac{f\left(\Lambda_0\,|\,H_0\right)}{f\left(\Lambda_0\,|\,H_1\right)}.$$

С другой стороны:

$$\underbrace{\frac{\Lambda}{\Lambda_0}\Big|_{\Lambda=\Lambda_0}}_{=1}=\left.\frac{\overbrace{\dfrac{f\left(y\,|\,H_0\right)}{f\left(y\,|\,H_1\right)}}^{\Lambda}}{\Lambda_0}\right|_{y=\Lambda_0}\Leftrightarrow 1=\frac{\overbrace{\dfrac{f\left(\Lambda_0\,|\,H_0\right)}{f\left(\Lambda_0\,|\,H_1\right)}}^{k}}{\Lambda_0}\Leftrightarrow 1=\frac{k}{\Lambda_0}\Leftrightarrow k=\Lambda_0=\frac{p\left(H_0\right)}{p\left(H_1\right)}.$$

Таким образом, получим следующий результат:

$$\left.\begin{array}{r}\min\limits_{\Lambda_0}\beta\left(\Lambda_0\right)\\ \text{при условии }\alpha\left(\Lambda_0\right)\le\varepsilon\end{array}\right|\Rightarrow k=\frac{p\left(H_0\right)}{p\left(H_1\right)}.$$

Алгоритм тестирования гипотез H_0, H_1 по критерию Неймана-Пирсона состоит из следующих шагов:

Шаг 1. Формулируются гипотезы H_0, H_1.

Шаг 2. С помощью эксперимента «Э» получается вектор измерений $y=\left(y_1,..,y_n\right)$ и для него вычисляется отношение правдоподобия $\Lambda=\dfrac{f\left(y\,|\,H_0\right)}{f\left(y\,|\,H_1\right)}$.

Шаг 3. Фиксируется величина ε и решается относительно Λ_0 уравнение:

$$\int\limits_{\Lambda_0}^{\infty} f\left(y\,|\,H_1\right)dy=\varepsilon .$$

Шаг 4. Сравниваем Λ с Λ_0 при $\Lambda>\Lambda_0\Rightarrow H_0^{+}\left(H_1^{-}\right)$ и при $\Lambda<\Lambda_0\Rightarrow H_1^{+}\left(H_0^{-}\right)$.

4.4.4. Синтез алгоритма САО для безынерционного объекта с «помехой» по нормальному закону. Пусть имеем ситуацию подобную случаю 1 п.4.1.2 (рис. 4.2, 4.3) с характеристикой:

$$y=-\left|x-x_*\right|+y_*$$

И $\varphi_1\left(t\right):E\varphi_1=0$, $D\varphi_1=\sigma^2 I$, σ^2 - известная величина, $f\left(\varphi_1\left(t\right)\right)\sim N\left(0,\sigma^2,I\right)$, тогда $y_i^{+}\sim N\left(0,\sigma^2\right)$, $i=\overline{1,n}$, n - число измерений положительной (+) полуволну выхода объекта.

Шаг 1. Формулируем гипотезы H_0, H_1.

$H_0:\widehat{f}\left(x_i+g\right)-\widehat{f}\left(x_i-g\right)=2g\ge 0$ - т. x_i - на левой ветви,

$H_1:\widehat{f}\left(x_i+g\right)-\widehat{f}\left(x_i-g\right)=2g<0$ - т. x_i - на правой ветви,

где $\widehat{f}\left(x_i+g\right)=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^{+}$, $\widehat{f}\left(x_i-g\right)=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^{-}$.

Шаг 2. Вычисляем отношение правдоподобия Λ по измерениям $y^{+}=\left(y_1^{+},..,y_n^{+}\right)$, $y^{-}=\left(y_1^{-},..,y_n^{-}\right)$. Имеем: $y_i^{+}\sim N\left(y_{in}^{+},\sigma^2\right)$, $y_i^{-}\sim N\left(y_{in}^{-},\sigma^2\right)\Rightarrow$

$\zeta=\widehat{f}\left(x_i+g\right)-\widehat{f}\left(x_i-g\right)\sim N\left(E\zeta,D\zeta\right)$, где $E\zeta=2g$, $D\zeta=\dfrac{2\sigma^2}{n}$.

Отношение Λ равно: $\Lambda = \dfrac{f(\zeta \mid H_0)}{f(\zeta \mid H_1)} = e^{-\left\{\frac{[\zeta-2g]^2}{2\sigma^2/n} - \frac{[\zeta+2g]^2}{2\sigma^2/n}\right\}} = e^{\frac{8n\zeta g}{\sigma^2}}$.

Шаг 3. Находим порог Λ_0 из решения уравнения:

$$\int_{\Lambda_0}^{\infty} f(\zeta \mid H_1)\,d\zeta = \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi\left(2\sigma^2/n\right)}} \int_{\Lambda_0}^{\infty} e^{-\frac{\left[\zeta - \overbrace{(-2g)}^{E\zeta|_{H_1^+}=-2g}\right]^2}{2\left(\sigma^2/2n\right)}} d\zeta = \varepsilon .$$

После замены $u = \dfrac{\zeta + 2g}{\sigma/\sqrt{2n}}$ получим: $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{\gamma(\Lambda_0)}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \varepsilon$, $\gamma(\Lambda_0) = \dfrac{\Lambda_0 + 2g}{\sigma/\sqrt{2n}}$.

Из соотношения: $\underbrace{\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{-\gamma}(\cdot)}_{\varepsilon} + \underbrace{\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\gamma}^{0}(\cdot) + \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{0}^{\gamma}(\cdot)}_{\Phi(\gamma)} + \underbrace{\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{\gamma}^{\infty}(\cdot)}_{\varepsilon} = 1$, получим:

$$\Phi(\gamma) = 1 - 2\varepsilon \Leftrightarrow \Phi\left(\overbrace{\frac{\Lambda_0 + 2g}{\sigma/\sqrt{2n}}}^{\gamma}\right) = 1 - 2\varepsilon, \quad \text{где} \quad \Phi(\cdot) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\gamma(\Lambda_0)} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \varepsilon \quad -$$

табличный интеграл (интеграл вероятностей).

Зададим, например, $\varepsilon = 0.01$, тогда $1 - 2\varepsilon = 0.98$ и соответственно:

$$\Phi\left(\gamma = \frac{\Lambda_0 + 2g}{\sigma/\sqrt{2n}}\right) = 0.98 .$$

Из статистических таблиц получим аргумент интеграла вероятностей:

$\gamma = \dfrac{\Lambda_0 + 2g}{\sigma/\sqrt{2n}} = 2.35$, откуда $\Lambda_0 = -2g + \dfrac{2.35}{\sqrt{2n}}\sigma$.

Шаг 4. Сравниваем Λ с Λ_0, тогда алгоритм САО будет:

$$x_{i+1} = \begin{cases} x_i + a, \ \zeta = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i^+ - \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i^- \ge \dfrac{\sigma^2}{8ng}\ln\Lambda_0, \ H_0^+ - \textit{рабочая точка на левой ветви} \\ x_i - a, \ \zeta = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i^+ - \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i^- < \dfrac{\sigma^2}{8ng}\ln\Lambda_0, \ H_1^+ - \textit{рабочая точка на правой ветви} \end{cases} .$$

Замечание. Для объекта типа Н-Л, когда имеем нелинейность кусочно-линейного типа, а линейность представляется апериодическим элементом первого, второго и т.д. порядков с известными динамическими свойствами, синтез алгоритма с прогнозированием производится по методике аналогичной п. 4.4.4. Пусть для простоты на выходе имеем инерционность первого порядка и $\varphi_1(t) \sim N\left(0, \sigma^2, I\right)$. Находим оценки $\widehat{f}(x_i + g)$, $\widehat{f}(x_i - g)$ по ММП или МНК, которые в предположении относительно закона $\varphi_1(t)$ совпадают. Для определенности используем МНК, тогда (п. 4.1.4, случай 1, 2): $\zeta = \widehat{f}(x_i + g) - \widehat{f}(x_i - g) = (1,0)\left(X^T X\right)^{-1} X^T Z^+ - (1,0)\left(X^T X\right)^{-1} X^T Z^-$, где $Z^{+^T} = \left(z_1^+, .., z_n^+\right)$, $Z^{-^T} = \left(z_1^-, .., z_n^-\right)$ - измерения положительной (+) и отрицательной (-) полуволн на выходе объекта, $X^T = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ e^{-\frac{\tau}{T}} & \cdots & e^{-\frac{n\tau}{T}} \end{pmatrix}$.

Из предположения $\varphi_1(t) \sim N\left(0, \sigma^2, I\right)$ и линейности оценок $\widehat{f}(x_i + g)$, $\widehat{f}(x_i - g)$: $\widehat{f}(x_i + g) = \sum_{i=1}^{n} b_i z_i^+$, $\widehat{f}(x_i - g) = \sum_{i=1}^{n} b_i z_i^-$, $\sum_{i=1}^{n} b_i \equiv 1$ получим

$\zeta \sim N(E\zeta, D\zeta)$, где $E\zeta = 2g$,

$$D\zeta = D\left[\widehat{f}(x_i + g) - \widehat{f}(x_i - g)\right] = 2D\widehat{f}(x_i + g) = 2\sigma^2 \left[(1,0)\left(X^T X\right)^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \frac{2\sigma^2}{n - l\left(n, \tau/T\right)},\ l(\cdot) = \left[\left(1 - e^{-\frac{n\tau}{T}}\right) \cdot \left(1 + e^{-\frac{\tau}{T}}\right)\right] \cdot \left[\left(1 + e^{-\frac{n\tau}{T}}\right) \cdot \left(1 - e^{-\frac{\tau}{T}}\right)\right]^{-1}.$$

Далее с учетом полученных соотношений реализуются шаги 1-4, в результате которых синтезируется алгоритм САО с прогнозированием для инерционного объекта с использованием критерия Неймана-Пирсона проверки гипотез.

Аналогичным способом синтезируется алгоритм САО с вычислением разрыва производной. Для этого необходимо положить $C = (0,1)$.

Для учета эквивалентного вертикального дрейфа, когда горизонтальный дрейф приводится к выходу нелинейной части объекта, необходимо положить: $C = (1,0,1)$, $X = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ e^{-\frac{\tau}{T}} & \cdots & e^{-\frac{n\tau}{T}} \\ \tau & \cdots & n\tau \end{pmatrix}_{(3\times n)}$.

<u>4.4.5. Синтез алгоритма САО инерционного объекта с проверкой гипотез относительно параметра биномиального закона.</u> Как правило, на практике закон f_{φ_1} распределения случайный возмущений φ_1 является неизвестным. В этом случае предположение, что $f_{\varphi_1} \sim N\left(0,\sigma^2\right)$ не выполняется. Синтезируем алгоритм САО для объекта типа Н-Л, когда линейная часть представляется апериодическим элементом первого порядка, с использованием критерия Неймана-Пирсона.

Пусть имеем объект, структурная схема которого изображена на рис. 4.43 а, однако на вход его многократно подаются пробные смещения $\pm g$ относительно рабочей точки x_i, тогда на входе линейной части будем иметь сигнал, изображенный на рис. 4.34 б, а на выходе сигнал $z^+(t)$, если рабочая точка x_i находится на левой ветви зависимости $y = f(x)$ (рис. 4.34 в) и соответственно $z^-(t)$ для рабочей точки x_i, находящейся на правой ветви $y = f(x)$ (рис. 4.34 г).

<u>На промежутке</u> $t \in [0, t_1 = 3\tau]$ имеем: $T \cdot \left(z_n^+(t)\right)' + z_n^+(t) = f(x_i + g)$ или в эквивалентной форме с учетом $\varphi_1(t)$: $z_1^+(t) = a_{01} \cdot 1 + a_{11} \cdot e^{-\frac{t}{T}} + \varphi_1(t)$, $a_{01} = f_1^+(x_i + g)$. По измерениям: $z_1^+(t = \tau) = z_{11}^+$, $z_1^+(t = 2\tau) = z_{12}^+$ находим $f_1^+(x_i + g)$ из решения СЛАУ по правилу Крамера:

$$\begin{cases} z_{11}^+ = f_1^+(x_i + g) \cdot 1 + a_{11} \cdot e^{-\frac{\tau}{T}} + \varphi_1(\tau) \\ z_{12}^+ = f_1^+(x_i + g) \cdot 1 + a_{11} \cdot e^{-\frac{2\tau}{T}} + \varphi_1(2\tau) \end{cases} \Rightarrow$$

$f_{1*}^+(x_i + g)$ - решение СЛАУ.

<u>На промежутке</u> $t \in [t_1, t_2 = 6\tau]$ имеем: $T \cdot \left(z_n^+(t - t_1)\right)' + z_n^+(t - t_1) = f(x_i - g)$ или в эквивалентной форме: $z_2^+(t) = a_{02} \cdot 1 + a_{12} \cdot e^{-\frac{\bar{t}}{T}} + \varphi_1(\bar{t})$, $\bar{t} = t - t_1$, $a_{02} = f_2^+(x_i - g)$. По измерениям: $z_2^+(\bar{t} = \tau) = z_{21}^+$, $z_2^+(\bar{t} = 2\tau) = z_{22}^+$ находим $f_2^+(x_i - g)$ из решения СЛАУ:

$$\begin{cases} z_{21}^+ = f_2^+(x_i - g) \cdot 1 + a_{12} \cdot e^{-\frac{\tau}{T}} + \varphi_1(\bar{t} = \tau) \\ z_{22}^+ = f_2^+(x_i - g) \cdot 1 + a_{12} \cdot e^{-\frac{2\tau}{T}} + \varphi_1(\bar{t} = 2\tau) \end{cases} \Rightarrow$$

$f_{2*}^{+}(x_i - g)$ - решение СЛАУ.

Аналогично поступаем на временных промежутках $t \in [t_2, t_3 = 9\tau]$, $t \in [t_3, t_4 = 12\tau]$ и т.д.

В результате измерений и вычислений получим: $f_{1*}^{+}(x_i + g)$, $t \in [0, t_1 = 3\tau]$; $f_{2*}^{+}(x_i - g)$, $t \in [t_1, t_2 = 6\tau]$; $f_{3*}^{+}(x_i + g)$, $t \in [t_2, t_3 = 9\tau]$; $f_{4*}^{+}(x_i - g)$, $t \in [t_3, t_4 = 12\tau]$;...; $f_{n*}^{+}(x_i - g)$, $t \in [t_{n-1}, t_n]$.

Рассмотрим разности: $f_{1*}^{+}(x_i + g) - f_{2*}^{+}(x_i - g)$, $f_{3*}^{+}(x_i + g) - f_{4*}^{+}(x_i - g)$,.., $f_{n-1*}^{+}(x_i + g) - f_{n*}^{+}(x_i - g)$, которые могут быть положительными или отрицательными из-за наличия случайных возмущений $\varphi_1(t)$. Используем кодирование этих разностей:

$$f_{1*}^{+}(x_i + g) - f_{2*}^{+}(x_i - g) = \begin{cases} 1, & \textit{если} \;\; f_{1*}^{+}(\cdot) - f_{2*}^{+}(\cdot) \ge 0 \\ 0, & \textit{иначе} \end{cases},$$

$$f_{3*}^{+}(x_i + g) - f_{4*}^{+}(x_i - g) = \begin{cases} 1, & \textit{если} \;\; f_{3*}^{+}(\cdot) - f_{4*}^{+}(\cdot) \ge 0 \\ 0, & \textit{иначе} \end{cases},$$

$$\vdots$$

$$f_{n-1*}^{+}(x_i + g) - f_{n*}^{+}(x_i - g) = \begin{cases} 1, & \textit{если} \;\; f_{n-1*}^{+}(\cdot) - f_{n*}^{+}(\cdot) \ge 0 \\ 0, & \textit{иначе} \end{cases}.$$

В результате кодирования получим последовательность из «0» и «1» типа: 1101001110. Очевидно, что число «1» должно быть больше числа «0» из-за того, что рабочая точка находится на левой ветви нелинейной характеристики $y = f(x)$ и наличия $\varphi_1(t)$.

Далее рассмотрим случай нахождения рабочей точки x_i на правой ветви $y = f(x)$. Тогда повторяя рассуждения и вычисления, приведенные выше, соответственно получим (рис. 4.34 г): $f_{1*}^{-}(x_i + g)$, $t \in [0, t_1]$; $f_{2*}^{-}(x_i - g)$, $t \in [t_1, t_2]$;...;$f_{n*}^{-}(x_i - g)$, $t \in [t_{n-1}, t_n]$.

В результате их кодирования получим также последовательность из «1» и «0», но в отличие от предыдущего случая эта последовательность будет содержать наоборот число «0» больше, чем число «1», т.к. точка x_i находится на правой ветви и воздействует $\varphi_1(t)$.

Пусть последовательность из «0» и «1» содержит m элементов. Вероятность появления в этой последовательности «1» обозначим через $p = const$, а вероятность появления «0» соответственно через $q = 1 - p = const$. Кроме того, очевидно, что их появления в последовательности из m двоичных разрядов являются независимыми событиями. Таким образом, имеем:

- $p = const$,

- появление «0» или «1» в последовательности из m разрядов - независимые события.

Это означает, что вероятность P_{im} появления i символов «1» в m разрядах подчиняется биномиальному распределению: $P_{im} = C_m^i p^i (1-p)^i$, $i = \overline{0,m}$, где C_m^i - число сочетаний из m элементов по i.

Таким образом, определение типа ветви зависимости $y = f(x)$ эквивалентно задаче оценки величины p биномиального распределения. Если p будет больше 0.5, то значит «1» в последовательности из m разрядов будет появляться чаще, т.е. рабочая точка x_i должна находиться на левой ветви. Если же наоборот p будет меньше 0.5, то значит «1» будет появляться реже в последовательности, т.е. x_i принадлежит правой ветви.

Эти рассуждения показывают, что алгоритм поиска оптимальной точки x_* или алгоритм распознавания типа ветви можно сформулировать в виде проверки следующих гипотез:

$H_0 : p = p_0$ - точка x_i находится на левой ветви,

$H_1 : p = p_1$ - точка x_i находится на правой ветви,

где p_0, p_1 - заданные константы: $p_0 + p_1 = 1$, $p_0 > p_1$.

Для проверки H_0, H_1 используем критерий Неймана-Пирсона. В соответствии с этим критерием имеем:

$$\Lambda = \frac{P_m(i \mid H_0)}{P_m(i \mid H_1)} = \frac{C_m^i p_0^i (1-p_0)^{m-i}}{C_m^i p_1^i (1-p_1)^{m-i}} = \left(\frac{p_0}{p_1}\right)^i \cdot \left(\frac{1-p_0}{1-p_1}\right)^{m-i} \underset{<}{\geq} \Lambda_0,$$

где Λ - отношение правдоподобия, Λ_0 - порог, «$\geq$» - справедлива гипотеза H_0, «$<$» - справедлива H_1.

После логарифмирования получим уравнение относительно i, решение которого равно:

$$i \underset{<}{\geq} \frac{\ln \Lambda_0 - m \ln\left(\dfrac{1-p_0}{1-p_1}\right)}{\ln\left(\dfrac{p_0(1-p_1)}{p_1(1-p_0)}\right)}.$$

Таким образом, если число i единиц в последовательности из m разрядов превышает число в правой части неравенства, то принимается H_0, если наоборот это число меньше правой части неравенства, то принимается H_1.

Получим величину порога Λ_0 из уравнения:

$$\sum_{i=\Lambda_0}^{\infty} C_m^i p_1^i (1-p_1)^{m-i} = \varepsilon. \tag{4.5}$$

Уравнение (4.5) является дискретным аналогом уравнения: $\int\limits_{\Lambda_0}^{\infty} f\left(y \mid H_1\right) dy = \varepsilon$, и для небольших $m \le 10$ решается с использованием таблиц биномиального закона. Однако при $m > 10$ можно использовать его аппроксимацию в виде нормального закона.

Получим эту аппроксимацию для нахождения Λ_0. Для этого рассмотрим случайную переменную u с биномиальной плотностью $p_m\left(u = k\right)$ распределения: $p_m\left(u = k\right) = C_m^k p_1^k \left(1 - p_1\right)^{m-k}$.

Найдем Eu, Du, используя аппарат характеристических функций $\varphi_u\left(t\right)$, t - параметр. Имеем:

$$\varphi_u\left(t\right) = Ee^{itu} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} C_m^k p_1^k \left(1 - p_1\right)^{m-k} = \sum_{k=0}^{\infty} C_m^k \left(e^{it} p_1\right)^k q_1{}^{m-k} \overset{\text{бином Ньютона}}{=}$$

$$= \left(e^{it} p_1 + q_1\right)^m .$$

Первый начальный момент ν_1 (математическое ожидание Eu) равен:

$$Eu = \nu_1 = \frac{1}{i} \cdot \varphi_u^{/}\left(t = 0\right) = \frac{1}{i} \cdot \left[\overbrace{m\left(e^{it} p_1 + q_1\right)^{m-1} \cdot e^{it} p_1 \cdot i}^{\varphi_u^{/}} \right]_{t=0} = mp_1 .$$

Второй начальный момент ν_2 равен:

$$\nu_1 = \frac{1}{2} \cdot \varphi_u^{//}\left(t = 0\right) = -\left[\overbrace{m\left(e^{it} p_1 + q_1\right)^{m-1} \cdot e^{it} p_1 \cdot i}^{\varphi_u^{/}} \right]_{t=0}^{/} = \left(mp_1\right)^2 + mp_1 q_1 ,$$

откуда дисперсия Du равна: $Du = \nu_2 - \nu_1^2 = mp_1 q_1$.

Рассмотрим нормированную случайную переменную: $w = \dfrac{u - Eu}{\sqrt{Du}} = \dfrac{u - mp_1}{\sqrt{mp_1 q_1}}$ и с помощью характеристической функции $\varphi_w\left(t\right)$ исследуем ее асимптотику при $m \to \infty$. Имеем:

$$\varphi_w\left(t\right) = Ee^{itw} = Ee^{it\frac{u - mp_1}{\sqrt{mp_1 q_1}}} = E\left[e^{it\frac{u}{\sqrt{mp_1 q_1}}} \cdot \underbrace{e^{-it\frac{mp_1}{\sqrt{mp_1 q_1}}}}_{\substack{A = const,\ \text{т.к} \\ \text{не зависит от } u}} \right] =$$

$$= A\cdot Ee^{it\frac{u}{\sqrt{mp_1q_1}}} = A\cdot\sum_{k=0}^{\infty} e^{it\frac{k}{\sqrt{mp_1q_1}}}\underbrace{C_m^k p_1^k q_1^{m-k}}_{p_m(u=k)} = A\cdot\sum_{k=0}^{\infty} C_m^k\left(e^{i\frac{t}{\sqrt{mp_1q_1}}}p_1\right)^k q_1^{m-k} =$$

$$\overset{\substack{\text{бином Ньютона}\\ \downarrow}}{=} A\cdot\left(e^{i\frac{t}{\sqrt{mp_1q_1}}}p_1+q_1\right)^m = \underbrace{e^{-it\frac{mp_1}{\sqrt{mp_1q_1}}}}_{A}\cdot\left(e^{i\frac{t}{\sqrt{mp_1q_1}}}p_1+q_1\right)^m =$$

$$=\left[e^{-it\frac{p_1}{\sqrt{mp_1q_1}}}\cdot\left(e^{i\frac{t}{\sqrt{mp_1q_1}}}p_1+q_1\right)\right]^m = \left(p_1e^{it\frac{\overbrace{1-p_1}^{q_1}}{\sqrt{mp_1q_1}}}+q_1e^{-it\frac{p_1}{\sqrt{mp_1q_1}}}\right)^m =$$

$$=\left(p_1e^{it\frac{q_1}{\sqrt{mp_1q_1}}}+q_1e^{-it\frac{p_1}{\sqrt{mp_1q_1}}}\right)^m \overset{\substack{e^{(\cdot)}-\text{ в ряд Тейлора}\\ \text{в окрестности } t=0\\ \downarrow}}{=}$$

$$=\left[p_1\left(1+\frac{itq_1}{\sqrt{mp_1q_1}}+\frac{(itq_1)^2}{2mp_1q_1}+\ldots\right)+q_1\left(1-\frac{itp_1}{\sqrt{mp_1q_1}}+\frac{(itp_1)^2}{2mp_1q_1}+\ldots\right)\right]^m \overset{\substack{p_1+q_1=1\\ \downarrow}}{=}$$

$$=\left[1+\frac{(it)^2}{2m}+\ldots\right]^m \overset{\substack{\text{при } t\to 0,\ m\to\infty\\ \text{пренебрегаем "хвостом"}\\ \text{ряда}\\ \downarrow}}{\simeq} \left[1+\frac{(it)^2}{2m}\right]^m =$$

$$=\left[1+\frac{1}{\frac{2}{(it)^2}m}\right]^{\frac{2}{(it)^2}m\frac{(it)^2}{2}} = \left\{\underbrace{\left[1+\frac{1}{\frac{2}{(it)^2}m}\right]^{\frac{2}{(it)^2}m}}_{\substack{\to e^{(\cdot)}\\ m\to\infty}}\right\}^{\frac{(it)^2}{2}} \underset{m\to\infty}{\to} e^{\frac{(it)^2}{2}} = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Таким образом получим следующий результат:

$$w = \frac{u - mp_1}{\sqrt{mp_1 q_1}} \Rightarrow \varphi_w(t) \underset{m\to\infty}{\to} e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

С другой стороны известен следующий результат: v - случайная величина:

$$f_v \sim N(a, \sigma^2) \Rightarrow \varphi_v(t) = e^{ita - \frac{t^2\sigma^2}{2}}.$$

Сравнивая между собой $\varphi_w(t)$ и $\varphi_v(t)$, получаем: $\varphi_v(t, a = 0, \sigma^2 = 1) = \varphi_w(t)$.

Так как между плотностью распределения и ее характеристической функцией существует взаимно-однозначное соответствие, то:

$$w = \frac{u - mp_1}{\sqrt{mp_1 q_1}} \Rightarrow f_w \underset{m\to\infty}{\to} N(a = 0, \sigma^2 = 1) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{w^2}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u \Rightarrow f_w \underset{m\to\infty}{\to} N(a = mp_1, \sigma^2 = mp_1 q_1) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi mp_1 q_1}} e^{-\frac{(u - mp_1)^2}{2mp_1 q_1}}.$$

Возвращаясь к проблеме нахождения Λ_0, имеем:

$$\sum_{i=\Lambda_0}^{\infty} C_m^i p_1^i (1 - p_1)^{m-i} = \varepsilon \underset{\substack{\uparrow \\ m>10}}{\approx} \frac{1}{\sqrt{2\pi mp_1(1 - p_1)}} \int_{\Lambda_0}^{\infty} e^{-\frac{(t - mp_1)^2}{2mp_1(1 - p_1)}} dt = \varepsilon.$$

Сделаем замену переменных: $u = \frac{t - mp_1}{\sqrt{mp_1(1 - p_1)}}$, тогда получим:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \varepsilon, \; x = \frac{\Lambda_0 - mp_1}{\sqrt{mp_1(1 - p_1)}}.$$

Из соотношения $\varepsilon + \Phi(x) + \varepsilon \equiv 1 \Leftrightarrow \Phi(x) = 1 - 2\varepsilon$, $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}} du$ - табличный интеграл (интеграл вероятностей). Зададим, например, $\varepsilon = 0.01$, тогда $1 - 2\varepsilon = 0.98$. Из таблиц математической статистики:

$$\Phi(x) = 0.98 \Rightarrow x = \frac{\Lambda_0 - mp_1}{\sqrt{mp_1(1 - p_1)}} \simeq 2.35,$$

откуда $\Lambda_0 = 2.35\sqrt{mp_1(1 - p_1)} + mp_1$, $m > 10$.

В результате получим алгоритм САО по критерию Неймана-Пирсона, в котором не используется предположение о типе закона распределения «помехи» $\varphi_1(t)$ на выходе объекта управления типа Н-Л:

$$x_{j+1}=\begin{cases} x_j+a,\ \textit{если}\ i\ge\dfrac{\ln\left[2.35\sqrt{mp_1(1-p_1)}+mp_1\right]-m\ln\left[\dfrac{1-p_0}{1-p_1}\right]}{\ln\left[\dfrac{p_0(1-p_1)}{p_1(1-p_0)}\right]},\ H_0^+ \\ x_j-a,\ \textit{если}\ i<\dfrac{\ln\left[2.35\sqrt{mp_1(1-p_1)}+mp_1\right]-m\ln\left[\dfrac{1-p_0}{1-p_1}\right]}{\ln\left[\dfrac{p_0(1-p_1)}{p_1(1-p_0)}\right]},\ H_1^+ \end{cases},$$

H_0^+ - рабочая точка x_i находится на левой ветви, H_1^+ - рабочая точка x_i находится на правой ветви. Здесь i - число «1» в последовательности из m разрядов $m>10$; p_0, p_1 - заданные числа $(p_0+p_1=1)$.

Подобные алгоритмы в радиотехнике и радиолокации принято называть бернуллиевыми детекторами (обнаружителями).

Замечание. Алгоритм, синтезированный выше, без труда может быть модифицирован для случаев:

- наличия эквивалентного вертикального дрейфа;
- линейная часть объекта Н-Л представляется в виде последовательного соединения нескольких апериодических элементов с известными динамическими параметрами;
- наличия транспортного запаздывания;
- при вычислении разрыва производной для уменьшения влияния инерционности.

4.4.6. Синтез алгоритма САО с использованием четкого критерия Байеса проверки гипотез. Как было показано выше, тип критерия проверки гипотез зависит от правила выбора порога Λ_0. В критерии Неймана-Пирсона этот порог Λ_0 выбирался из условия минимизации ошибки 2-го рода при фиксированном значении ошибки 1-го рода. Другой способ выбора Λ_0 состоит в выборе его из условия минимизации функции риска $R(\Lambda_0)$, тогда такой критерий принято называть критерием (тестом) Байеса (Bayes).

Функция риска $R(\Lambda_0)$ для выбора Λ_0 вводится следующим образом:

$$R(\Lambda_0)=P(H_0)\cdot\left\{c_{11}\left[1-\beta(\Lambda_0)\right]+c_{12}\beta(\Lambda_0)\right\}+P(H_1)\cdot\left\{c_{22}\left[1-\alpha(\Lambda_0)\right]+c_{21}\alpha(\Lambda_0)\right\},$$

где $\alpha(\cdot)$, $\beta(\cdot)$ - ошибки 1-го и 2-го рода соответственно,

$C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22}\end{pmatrix}$ - матрица с элементами стоимости рисков в принятии той или иной гипотезы H_0, H_1. Порог Λ_0 находится из условия:

$$\min_{\Lambda_0} R(\Lambda_0) \Rightarrow \frac{\partial R(\Lambda_0)}{\partial \Lambda_0} = 0,$$

откуда имеем:

$$\frac{\partial}{\partial \Lambda_0}\left\{ P(H_0)\cdot\left[(c_{12}-c_{11})\cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\Lambda_0} f(y\,|\,H_0)\,dy}_{\beta(\Lambda_0)} + c_{11}\right] + \right.$$

$$\left. + P(H_1)\cdot\left[(c_{21}-c_{22})\cdot \underbrace{\int_{\Lambda_0}^{\infty} f(y\,|\,H_1)\,dy}_{\alpha(\Lambda_0)} + c_{22}\right]\right\} =$$

$$= P(H_0)\cdot(c_{12}-c_{11})\cdot\frac{\partial}{\partial \Lambda_0}\int_{-\infty}^{\Lambda_0} f(y\,|\,H_0)\,dy + P(H_1)\cdot(c_{21}-c_{22})\cdot\frac{\partial}{\partial \Lambda_0}\int_{\Lambda_0}^{\infty} f(y\,|\,H_1)\,dy =$$

$$= P(H_0)\cdot(c_{12}-c_{11})\cdot\left[\int_{-\infty}^{\Lambda_0} \underbrace{\frac{\partial f(\cdot)}{\partial \Lambda_0}}_{\substack{\to 0,\ \textit{т.к. } f(\cdot)\ \textit{не} \\ \textit{зависит от } \Lambda_0}} dy + \underbrace{\frac{\partial \Lambda_0}{\partial \Lambda_0}}_{\to 1} f(\cdot)\Big|_{y=\Lambda_0} - \underbrace{\frac{\partial(-\infty)}{\partial \Lambda_0}}_{\to 0} f(\cdot)\Big|_{y=\Lambda_0}\right] +$$

$$+ P(H_1)\cdot(c_{21}-c_{22})\cdot\left[\int_{\Lambda_0}^{\infty} \underbrace{\frac{\partial f(\cdot)}{\partial \Lambda_0}}_{\substack{\to 0,\ \textit{т.к. } f(\cdot)\ \textit{не} \\ \textit{зависит от } \Lambda_0}} dy + \underbrace{\frac{\partial(\infty)}{\partial \Lambda_0}}_{\to 0} f(\cdot)\Big|_{y=\Lambda_0} - \underbrace{\frac{\partial \Lambda_0}{\partial \Lambda_0}}_{\to 1} f(\cdot)\Big|_{y=\Lambda_0}\right] =$$

$$= P(H_0)(c_{12}-c_{11}) f(\Lambda_0\,|\,H_0) - P(H_1)(c_{21}-c_{22}) f(\Lambda_0\,|\,H_1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(\Lambda_0\,|\,H_0)}{f(\Lambda_0\,|\,H_1)} = \frac{P(H_1)(c_{21}-c_{22})}{P(H_0)(c_{12}-c_{11})}.$$

С другой стороны имеем:

$$\underbrace{\left.\frac{\Lambda}{\Lambda_0}\right|_{\Lambda=\Lambda_0}}_{=1} = \left.\frac{\overbrace{\dfrac{f(y\,|\,H_0)}{f(y\,|\,H_1)}}^{\Lambda}}{\Lambda_0}\right|_{\Lambda=\Lambda_0} \Leftrightarrow 1 = \frac{\dfrac{f(\Lambda_0\,|\,H_0)}{f(\Lambda_0\,|\,H_1)}}{\Lambda_0} \Leftrightarrow \frac{f(\Lambda_0\,|\,H_0)}{f(\Lambda_0\,|\,H_1)} = \Lambda_0 .$$

Таким образом, получим следующий результат:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial R(\Lambda_0)}{\Lambda_0} = 0 \Leftrightarrow \frac{f(\Lambda_0\,|\,H_0)}{f(\Lambda_0\,|\,H_1)} = \frac{P(H_1)(c_{21}-c_{22})}{P(H_0)(c_{12}-c_{11})} \\ &\Lambda_0 = \frac{f(\Lambda_0\,|\,H_0)}{f(\Lambda_0\,|\,H_1)} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Lambda_0 = \frac{P(H_1)(c_{21}-c_{22})}{P(H_0)(c_{12}-c_{11})} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} H_0^+, \ \textit{если} \ \Lambda = \dfrac{f(y\,|\,H_0)}{f(y\,|\,H_1)} \ge \Lambda_0 \\ H_1^+, \ \textit{если} \ \Lambda = \dfrac{f(y\,|\,H_0)}{f(y\,|\,H_1)} < \Lambda_0 \end{cases} .$$

<u>Пример.</u> Пусть имеем условие п. 4.4.5 (рис. 4.34), тогда:

$H_0 : p = p_0$ - рабочая точка x_i находится на левой ветви,

$H_1 : p = p_1$ - рабочая точка x_i находится на правой ветви,

где p_0, p_1 - заданные константы: $p_0 + p_1 = 1$, $p_0 > p_1$.

Имеем:

$$\Lambda = \frac{P_m(i\,|\,H_0)}{P_m(i\,|\,H_1)} = \frac{C_m^i p_0^i (1-p_0)^{m-i}}{C_m^i p_1^i (1-p_1)^{m-i}} = \left(\frac{p_0}{p_1}\right)^i \cdot \left(\frac{1-p_0}{1-p_1}\right)^{m-i} .$$

Тогда порог Λ_0 получается из условия:

$$\left.\frac{\Lambda}{\Lambda_0}\right|_{i=\Lambda_0} = 1,$$

тогда:

$$\left.\Lambda\right|_{\Lambda_0} = \left.\left(\frac{p_0}{p_1}\right)^i \cdot \left(\frac{1-p_0}{1-p_1}\right)^{m-i}\right|_{i=\Lambda_0} \overset{\substack{p_1=1-p_0 \\ p_0=1-p_1 \\ \downarrow}}{\Rightarrow} \left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\Lambda_0} \cdot \left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{-(m-\Lambda_0)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Lambda_0 = \left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{2\Lambda_0} \cdot \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^m \Rightarrow \ln\Lambda_0 = 2\Lambda_0 \ln\frac{p_0}{p_1} + m\ln\frac{p_1}{p_0} .$$

Пусть для определенности $p_0 = 0.9$, $p_1 = 0.1$, $(p_0 > p_1)$, $m = 10$, тогда:

$$\ln\Lambda_0 = 4.4\Lambda_0 - 22.0 \Rightarrow \Lambda_0 \simeq 5.4 .$$

В результате получим (принимается гипотеза $H_0 - \left(H_0^+\right)$):

$$H_0^+:\ \textit{если}\ \frac{\Lambda}{\Lambda_0} \geq 1 \Leftrightarrow \underbrace{\left(\frac{p_0}{p_1}\right)^i \cdot \left(\frac{1-p_0}{1-p_1}\right)^{m-i}}_{=\Lambda} \geq \Lambda_0,$$

откуда после логарифмирования и преобразований получим:

$$H_0^+: i \geq \left[\ln \Lambda_0 - m \ln \frac{p_1}{p_0}\right] \cdot \left[2 \ln \frac{p_0}{p_1}\right]^{-1} \Bigg|_{\substack{\Lambda_0 = 5.4,\ m=10 \\ p_0 = 0.9,\ p_1 = 0.1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H_0^+ : i \geq 5.4,\ H_1^+ : i < 5.4.$$

После округления: $H_0^+ : i \geq 5$, $H_1^+ : i < 5$, где i - число «1» в последовательности из $m = 10$ разрядов, тогда:

$$x_{j+1} = \begin{cases} x_j + a,\ \textit{если}\ i \geq 5,\ H_0^+ - \begin{matrix} \textit{рабочая точка } x_i \textit{ находится} \\ \textit{на левой ветви } y = f(x) \end{matrix} \\ x_j - a,\ \textit{если}\ i < 5,\ H_1^+ - \begin{matrix} \textit{рабочая точка } x_i \textit{ находится} \\ \textit{на правой ветви } y = f(x) \end{matrix} \end{cases}.$$

<u>4.4.7. Синтез алгоритма САО с использованием нечеткого критерия Байеса</u> [8]. При реализации четкого критерия Байеса проверки гипотез:

$$H_0 : a(y) = a_0,$$
$$H_1 : a(y) = a_1,$$

где $y = (y_1, .., y_n)$ - вектор измерений, испытывается отношение вероятностей:

$$\frac{p(H_0 \mid y)}{p(H_1 \mid y)} = \frac{\Lambda}{\Lambda_0}, \qquad (4.6)$$

где $\Lambda = \dfrac{f(y \mid H_0)}{f(y \mid H_1)}$ - отношение правдоподобия, $\Lambda_0 = \dfrac{p(H_1)}{p(H_0)}$ - порог.

Различные модификации четкого критерия Байеса и его нечеткий аналог следует из таб. 4.1.

Таблица 4.1.

Исходные предположения четкого и нечеткого критерия Байеса.

№ п/п	Предположения	Критерий Байеса	
		Четкий $H_0 : a(y) = a_0$, $H_1 : a(y) = a_1$	Нечеткий $\overline{H_0} : a(y) = a_0$, $\overline{H_1} : a(y) = a_1$
1	Априорные плотности $f(y)$, $f(y\|H)$	Параметры плотностей – четкие переменные	Параметры плотностей – нечеткие переменные
2	Вектор измерений $y = (y_1,..,y_n)$	Четкие случайные переменные	Нечеткие случайные переменные (гибридные данные)
3	Отношение правдоподобия Λ и порог Λ_0	Четкие переменные	Нечеткие переменные
4	Константы a_0, a_1	Четкие числа	Нечеткие числа

В зависимости от постулируемых предположений, представленных в табл. 4.1,в нечетком критерии Байеса формулируются различные его модели. Ниже рассматриваются некоторые из них применительно к синтезу алгоритмов САО.

Модель Тахери (Tacheri) нечеткого критерия Байеса без функции потерь. В этой модели полагается, что имеются нечеткие гипотезы:

$$\overline{H_0} : a(y) \simeq a_0,$$

$$\overline{H_1} : a(y) \simeq a_1,$$

$a_0 + a_1 = 0$, где a_0, a_1 - нечеткие переменные с заданными функциями принадлежностей $\mu_0(a)$, $\mu_1(a)$ соответственно, «$\simeq$» - символ «приблизительно равно».

Отношение нечетких вероятностей в (4.6):

$$\frac{p\left(\overline{H_0} = a_0 \mid y\right)}{p\left(\overline{H_1} = a_1 \mid y\right)} = \frac{\alpha}{\alpha_0}$$

определяется как $[8]$:

$$\alpha_0 = p\left(\overline{H_0} = a_0 \mid y\right) = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\overline{H_0} = a_0 \mid y\right) \cdot \mu_0(a) da, \ \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\overline{H_0} = a_0 \mid y\right) da \equiv 1;$$

$$\alpha_1 = p\left(\overline{H_1} = a_1 \mid y\right) = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\overline{H_1} = a_1 \mid y\right) \cdot \mu_1(a) da, \ \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\overline{H_1} = a_1 \mid y\right) da \equiv 1,$$

откуда:

$$\overline{H_0^+},\ \textit{если}\ \ \frac{\alpha_0}{\alpha_1} \ge 1 \Leftrightarrow \alpha_0 \ge \alpha_1,$$

$$\overline{H_1^+},\ \textit{если}\ \ \frac{\alpha_0}{\alpha_1} < 1 \Leftrightarrow \alpha_0 < \alpha_1.$$

<u>Пример.</u> Пусть имеем безынерционный объект с характеристикой:

$$y = -\left|x - x_*\right| + y_*.$$

На его входе имеем рабочие смещения a и пробные $\pm g$ относительно рабочей точки x_i, тогда на его выходе будем иметь вектора измерений $y^+ = \left(y_1^+,..,y_n^+\right)$ и $y^- = \left(y_1^-,..,y_n^-\right)$ (рис. 4.35 а-в). Синтезируем алгоритм САО с $\varphi_1(t) \sim N\left(0,\sigma^2\right)$, используя модель Тахери без функции потерь.

Имеем нечеткие гипотезы:

$\overline{H_0} : a(y) \simeq a_0 \ge 0$ - рабочая точка x_i находится на левой ветви,

$\overline{H_1} : a(y) \simeq a_1$, $\left(a_1 = -a_0\right)$ - рабочая точка x_i находится на правой ветви.

Нечеткие переменные a_0, a_1 имеют функции принадлежностей:

$$\mu_0(a) = \begin{cases} 1, & a \in \left[0, 2a_0\right] \\ 0, & \textit{иначе} \end{cases},\ \mu_1(a) = \begin{cases} 1, & a \in \left(0, -2a_0\right] \\ 0, & \textit{иначе} \end{cases},$$

$\mu_1(a) = \overline{\mu_0}(a)$, где $\overline{(\cdot)}$ - отрицание по Заде $\mu_1(a) = 1 - \mu_0(a)$.

<u>Нечеткая вероятность</u> $\alpha_0\left(H_0^+\right)$ <u>при выполнении гипотезы</u> H_0^+ равна:

$$\alpha_0 = p\left(\overline{H_0} = a_0 \mid y\right) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f\left(\overline{H_0} = a_0 \mid y\right) \cdot \mu_0(a)\,da + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overbrace{f\left(\overline{H_1} = a_1 \mid y\right) \cdot \mu_1(a)\,da}^{\to 0} =$$

$$= \overbrace{\int\limits_{-\infty}^{0} f\left(\overline{H_0} = a_0 \mid y\right) \cdot 0 \cdot da}^{\to 0} + \int\limits_{0}^{2a_0} f\left(\overline{H_0} = a_0 \mid y\right) \cdot 1 \cdot da + \overbrace{\int\limits_{2a_0}^{\infty} f\left(\overline{H_0} = a_0 \mid y\right) \cdot 0 \cdot da}^{\to 0} =$$

$$= \int\limits_{a=0}^{a=2a_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi Da}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{a-a_0}{\sqrt{Da}}\right)^2} da,$$

$$a(y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^+ - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^-,\ Da(y) = \frac{2\sigma^2}{n}.$$

Преобразуем полученное выражение к стандартному виду в форме интеграла вероятностей. Для этого введем замену переменных: $\dfrac{a - a_0}{\sqrt{Da}} = t$, тогда $da = \sqrt{Da} \cdot dt$, $\left.\frac{a - a_0}{\sqrt{Da}}\right|_{a=0} = -\frac{a_0}{\sqrt{Da}}$, $\left.\frac{a - a_0}{\sqrt{Da}}\right|_{a=2a_0} = \frac{2a_0 - a_0}{\sqrt{Da}} = \frac{a_0}{\sqrt{Da}}$,

откуда: $\alpha_0 = \left.\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\frac{a_0}{\sqrt{Da}}}^{\frac{a_0}{\sqrt{Da}}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \right|_{\alpha = 2a_0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\frac{a_0}{\sqrt{Da}}}^{\frac{a_0}{\sqrt{Da}}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$, $a_0 > 0$.

Из очевидного соотношения (рис. 4.36):

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{-\frac{a_0}{\sqrt{Da}}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\frac{a_0}{\sqrt{Da}}}^{\frac{a_0}{\sqrt{Da}}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt}_{\alpha_0} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\frac{a_0}{\sqrt{Da}}}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \equiv 1$$

будем иметь: $\alpha_0 = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{-\frac{a_0}{\sqrt{Da}}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\frac{a_0}{\sqrt{Da}}}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

Выразим два интеграла справа через табличный интеграл вероятностей:

$$F(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt .$$

Имеем: $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{-\frac{a_0}{\sqrt{Da}}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 0.5 - \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\frac{a_0}{\sqrt{Da}}}^{0} e^{-\frac{t^2}{2}} dt}_{=0.5F\left(\frac{a_0}{\sqrt{Da}}\right)} = 0.5\left[1 - F\left(\frac{a_0}{\sqrt{Da}}\right)\right]$,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\frac{a_0}{\sqrt{Da}}}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 0.5 - \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{\frac{a_0}{\sqrt{Da}}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt}_{=0.5F\left(\frac{a_0}{\sqrt{Da}}\right)} = 0.5\left[1 - F\left(\frac{a_0}{\sqrt{Da}}\right)\right],$$

откуда: $\alpha_0 = 1 - 0.5\left[1 - F\left(\frac{a_0}{\sqrt{Da}}\right)\right] - 0.5\left[1 - F\left(\frac{a_0}{\sqrt{Da}}\right)\right] \Leftrightarrow \alpha_0 = F\left(\frac{a_0}{\sqrt{Da}}\right)$.

Числовой пример. При $a(y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^+ - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^-$, $y = -|x - x_*| + y_*$,

$D\varphi_1 = \sigma^2 \cdot I$, имеем: $a_0 = Ea(y) = +2g$, $Da(y) = \frac{2\sigma^2}{n}$, откуда:

$\dfrac{a_0}{\sqrt{Da}} = \dfrac{2g}{\sqrt{\dfrac{2\sigma^2}{n}}} = \dfrac{\sqrt{2n}}{\Delta}$, $\Delta = \dfrac{\sigma}{g}$ - отношение «помеха/сигнал».

Положим: $\Delta = \dfrac{\sigma}{g} = 2$, $n = 2$, тогда $\dfrac{a_0}{\sqrt{Da}} = \dfrac{\sqrt{2 \cdot 2}}{2} = 1 \Rightarrow F(1) \simeq 0.68$,

$1 - F(1) \simeq 0.32$, поэтому: $\dfrac{\alpha_0\left(\overline{H_0^+}\right)}{\alpha_1\left(\overline{H_1^+}\right)} = \dfrac{F\left(\dfrac{a_0}{\sqrt{Da}}\right)}{1 - F\left(\dfrac{a_0}{\sqrt{Da}}\right)} \simeq \dfrac{0.6827}{0.3173} \simeq 2.15 > 1.$

В результате получим: если $\dfrac{\alpha_0\left(\overline{H_0^+}\right)}{\alpha_1\left(\overline{H_1^+}\right)} \simeq 2.15$, то $x_{j+1} = x_j + a$. Аналогично

вычисляется порог $\dfrac{\alpha_0\left(\overline{H_0^+}\right)}{\alpha_1\left(\overline{H_1^+}\right)}$ для $a_0 = Ea(y) = -2g$.

Замечание. Для синтеза алгоритмов САО также могут быть использованы модели Дельгадо (Delgado) и Саади (Saade) нечеткого байесовского теста $[8]$.

4.4.8. Четкий и нечеткий последовательный тест А. Вальда проверки гипотез $\left[8,\ 38\right]$. При тестировании двух альтернативных гипотез с помощью испытания отношения правдоподобия Λ (4.6) арифметическое пространство разбивается на две части порогом Λ_0. В четком последовательном анализе проверки статистических гипотез:

$$H_0 : p = p_0,$$
$$H_1 : p = p_1,$$

$p_0 < p_1$, где p - оценка по измерениям $(x_1,..,x_n)$, p_0, p_1 - заданные четкие числа; арифметическое пространство принятия решений разбивается на три части порогами A и B. В теории последовательного анализа показано, что $A \le \dfrac{1-\beta}{\alpha}$, $B \ge \dfrac{1-\beta}{\alpha}$, где α, β - ошибки 1-го и 2-го рода соответственно. С учетом неравенств относительно A и B четкий последовательный критерий записывается в виде:

$$H_1^+,\ \textit{если}\ \Lambda \ge \frac{1-\beta}{\alpha},$$
$$H_0^+,\ \textit{если}\ \Lambda \ge \frac{\beta}{1-\alpha}.$$

Решение не принимается, если $\frac{\beta}{1-\alpha} < \Lambda < \frac{1-\beta}{\alpha}$, где $\Lambda = \frac{f(x \mid H_1)}{f(x \mid H_0)}$ - отношение правдоподобия. Число компонентов n случайного вектора $X = (X_1,..,X_n)$ является случайной величиной, и математическое ожидание En меньше, чем в тестах Байеса, Неймана-Пирсона и других.

Рассмотрим частный случай нечетких гипотез, когда p_0 - четкое число, p_1 - нечеткое число, т.е.:

$$\widetilde{H_0} : p = p_0,$$
$$H_1 : p \simeq p_1,$$

функции принадлежностей p_0, p_1 изображены на рис. 6.37:

$$\mu_0(p) = \text{singl}(p - p_0),\ \mu_1(p) = \mathrm{e}^{-\frac{(p-p_1)^2}{\delta^2}}.$$

Зададим значение $\mu_0(p) = \mu_1(p) = \mu^*$ и разрешим уравнение относительно p. В результате получим решения:

$$p_1^{(1)} = p_1 - \delta\sqrt{\ln\frac{1}{\mu^*}},\ p_1^{(2)} = p_1 + \delta\sqrt{\ln\frac{1}{\mu^*}},$$

где $p_0 < p_1^{(1)} < p_0 < p_1^{(2)}$.

Рассмотрим совокупность следующих гипотез:

$$H_0^{(0)} : p = p_0,\ H_0^{(1)} : p = p_0,\ H_0^{(2)} : p = p_0,$$
$$H_1^{(0)} : p = p_1,\ H_1^{(1)} : p = p_1^{(1)},\ H_1^{(2)} : p = p_1^{(2)}.$$

Для проверки каждой из трех сформулированных гипотез применим четкую последовательную процедуру и решение каждой их них (в виде уравнений порогов) обозначим соответственно:

$\left(L_1^{(0)}, L_2^{(0)}\right)$, $\left(L_1^{(1)}, L_2^{(1)}\right)$, $\left(L_1^{(2)}, L_2^{(2)}\right)$,

где $L_1^{(i)}$ $\left(i = \overline{0,2}\right)$ - уравнения порогов, разделяющих области принятия гипотез $H_1^{(i)}$ и продолжения испытаний, $L_2^{(i)}$ - уравнения порогов, разделяющих области продолжения испытаний и принятия гипотез $H_0^{(i)}$.

Так как гипотеза H_0 - четкая, а H_1 - нечеткая, то за порог $\widetilde{L_2}$ принятия H_0 берется: $\widetilde{L_1} = \min\left(L_1^{(0)}, L_1^{(1)}, L_1^{(2)}\right)$.

Аналогичным способом может быть построено решающее правило для гипотез:

$$H_0 : p \simeq p_0,$$
$$H_1 : p \simeq p_1.$$

Не трудно показать, что для этих гипотез будем соответственно иметь девять четких гипотез. В этом случае: $\widetilde{L_1} = \min\left(L_1^{(0)},..,L_1^{(8)}\right)$, $\widetilde{L_2} = \min\left(L_2^{(0)},..,L_2^{(8)}\right)$.

4.4.9. Синтез адаптивной САО. При наличии статической характеристики объекта управления экстремального типа, форма которой изменяется в процессе функционирования объекта, а сама характеристика смещается относительно выбранной системы координат под воздействием монотонных возмущений, используются поисковые САО. Задача системы состоит в непрерывном поиске экстремального значения характеристики и поддержании найденного значения.

Одна из центральных проблем теории и практики САО состоит в уменьшении влияния случайных возмущений, которые возникают в измерительной системе на выходе объекта управления по каналу: датчик – канал связи - преобразователь аналог/цифра. Наличие случайных возмущений приводит к ложным срабатываниям САО и, как следствие этого, происходит увеличение времени поиска, и быстродействие системы уменьшается. При наличии значительной инерционности на выходе объекта и монотонных возмущениях система может быть неработоспособной.

В импульсных (шаговых) САО для уменьшения случайных возмущений применяются алгоритмические методы фильтрации, которые значительно повышают помехозащищенность системы. Эти методы основаны на накоплении измерений, которые получаются на выходе объекта, с последующей их статистической обработкой в системе по различным алгоритмам в зависимости от априорных сведений относительно случайных возмущений.

Перспективными методами фильтрации в импульсных САО являются методы проверки статистических гипотез с использованием различных критериев отношения правдоподобия. В этом случае задача поиска экстремального значения статической характеристики формулируется как эквивалентная задача проверки двух альтернативных гипотез.

Эффективным методом испытания отношения правдоподобия является последовательный анализ А. Вальда. По сравнению с другими критериями в последовательном критерии число измерений априори не фиксируется и является случайной величиной. Алгоритмы САО, синтезированные на основе последовательной процедура обработки измерений, обладают адаптивным свойством. Это свойство состоит в том, что вдали от экстремального значения, когда крутизна статической характеристики значительна, имеет место небольшое значение отношения «помех/сигнал», и тогда система автоматически производит небольшое число измерений выхода. И, наоборот, по мере приближения к экстремуму, когда крутизна характеристики незначительна и отношение «помех/сигнал» увеличивается, то система автоматически увеличивает число измерений. Таким образом, система автоматически замедляет свое движение по мере приближения к экстремуму, адаптируясь к изменению внешних условий.

В классической теории проверки статистических гипотез рассматривается соотношение плотностей вероятностей, параметры которых принимают заданные четкие значения. Эти значения зависят от априорных сведений относительно помехи. В действительности из-за неопределенности помехи задаваемые значения параметров известны лишь приближенно и являются нечеткими числами, поэтому возникает необходимость в модификации испытания отношения правдоподобия с учетом нечеткости значений, которые принимают параметры. Это приводит к задаче модификации классической последовательной процедуру в ее нечеткий аналог.

Ниже синтезируются алгоритмы поисковой САО с использованием нечеткой последовательной процедуры проверки гипотез относительно значений, которые принимает параметр биномиального распределения.

Показывается преимущество нечеткого подхода по сравнению с классической последовательной процедурой.

Рассмотрим САО, в которой задача поиска экстремума статической характеристики объекта управления формулируется как эквивалентная задача нечеткой последовательной проверки статистических гипотез относительно неизвестного параметра биномиального распределения.

Для простоты рассуждений и математических выкладок рассмотрим безынерционный объект с нелинейной статической характеристикой $y_u = f(x)$, имеющей максимум в отсутствие монотонных возмущений, на выходе которого имеется помеха в виде аддитивного случайного процесса $\varphi_1(t)$ (см. рис. 4.38 а). На входе САО имеем: $y(t) = y_u(t) + \varphi_1(t)$. Пусть на вход объекта подают пробные ступенчатые смещения $\pm g$ относительно $x_i < x^*$, (x^* - оптимальное значение), что соответствует рабочей точке A, которая находится на левой ветви характеристики (рис. 4.38 б). На выходе будем иметь сигнал $y_i(t)$, фаза которого будет совпадать с фазой входного сигнала $x_i(t)$. При нахождении рабочей точки на правой ветви характеристики (точка B) – выходной сигнал $y_i(t)$ будет находиться в противофазе с входным $x_i(t)$.

Пусть моменты времени $t = \tau, 2\tau, .., k\tau$ получены измерения выходного сигнала $y_i(t)$: $y_i(\tau) = y_{i1}, y_i(2\tau) = y_{i2}, .., y_i(k\tau) = y_{ik}$, где k - четное число.

Рассмотрим кодированные разности:

$$z_{i1} = y_{i1} - y_{12} = \begin{cases} 1, & y_{i1} - y_{12} \geq 0 \\ 0, & иначе \end{cases}$$

$$z_{i2} = y_{i3} - y_{14} = \begin{cases} 1, & y_{i3} - y_{14} \geq 0 \\ 0, & иначе \end{cases}$$

$$\vdots$$

$$z_{in} = y_{ik-1} - y_{1k} = \begin{cases} 1, & y_{ik-1} - y_{1k} \ge 0 \\ 0, & иначе \end{cases}.$$

Если бы $\varphi_1(t) = 0$ (отсутствие помехи на выходе объекта), то в результате получили бы последовательность $z_i = \{z_{i1}, z_{i2}, .., z_{in}\}$ только из $n = \frac{k}{2}$ единиц. При $\varphi_1(t) \neq 0$ эта последовательность будет содержать «0» и «1», причем, при небольшом уровне $\varphi_1(t)$ число «1» будет значительно больше числа «0», т.е. вероятность p появления «1» в последовательности будет больше вероятности $q = 1 - p$ появления «0».

Рассмотрим выходной сигнал $y_i(t)$ для рабочей точки B, которая находится на правой ветви характеристики, и для измерений $y_{i1}, y_{i2}, .., y_{ik}$ проведем аналогичные рассуждения относительно кодирования разностей. Т.к. выходной сигнал находится в противофазе с входным, то в результате кодирования (при $\varphi_1(t) = 0$) будем иметь последовательность $z_j = \{z_{j1}, z_{j2}, .., z_{jn}\}$ только из одних «0», а при $\varphi_1(t) \neq 0$ эта последовательность будет содержать также «0» и «1». Причем, по сравнению с предыдущим случаем, при небольшом уровне $\varphi_1(t)$ число «0» в последовательности будет значительно больше числа «1», т.е. вероятность q появления «0» будет больше вероятности $p = 1 - q$ появления «1».

Таким образом, задача поиска оптимального значения эквивалентна задаче проверки статистических гипотез относительно неизвестного параметра p и сравнению его с заданными порогами p_0, p_1. При $p_0 < 0.5$ рабочая точка находится на правой ветви, и следующий рабочий шаг необходимо производить в сторону уменьшения x. При $p_1 > 0.5$ рабочая точка находится на левой ветви, и следующий рабочий шаг производится соответственно в сторону увеличения x. В результате задача распознавания типа ветви характеристики (левая или правая) превратилась в эквивалентную задачу распознавания типа бинарной последовательности. Для распознавания ее типа используем нечеткую последовательную процедуру. Пусть относительно $\varphi_1(t)$ имеем: $M\{\varphi_1(t)\} = 0$, $D\{\varphi_1(t)\} = \sigma^2 \cdot I$, где M, D - операторы математического ожидания и дисперсии соответственно, σ^2 - известная величина дисперсии, I - единичная матрица. При этих условиях вероятность p появления «1» в бинарной последовательности является константой. Кроме того, предположим измерения $y_{i1}, y_{i2}, .., y_{ik}$ независимыми относительно $\varphi_1(t)$, т.е.:

$$f(y_{i1}, y_{i2}, .., y_{ik}) = \prod_{l=1}^{k} f(y_{il}),$$

где $f\left(y_{i1},y_{i2},..,y_{ik}\right)$ - совместная плотность вероятностей случайного вектора $Y_i=\left(y_{i1},y_{i2},..,y_{ik}\right)$, $f\left(y_{il}\right)$ - одномерная плотность вероятностей l-ой компоненты вектора Y_i. Тогда появления «0» или «1» в бинарной последовательности $z_i=\left\{z_{i1},z_{i2},..,z_{in}\right\}$ являются независимыми событиями. В результате имеем схему независимых испытаний, т.е. вероятность $P_n\left(z_i=m\right)$ появления m числа «1» из n символов в бинарной последовательности z_i подчиняется распределению Бернулли:

$$P_n\left(z_i=m\right)=C_n^m p^m\left(1-p\right)^{n-m},\ m=\overline{1,n},$$

где C_n^m - число испытаний из n элементов по m.

Задача определения типа ветви характеристики может быть сформулирована как задача проверки двух гипотез относительно неизвестного параметра p биномиального распределения:

$$\widetilde{H_0}: p=p_0, \text{ рабочая точка находится на правой ветви,}$$

$$\widetilde{H_1}: p\simeq p_1, \text{ рабочая точка находится на левой ветви,}$$

где p_0, p_1 - числа с функциями принадлежностей (рис. 4.39).

После редукции гипотез к соответствующим четким гипотезам, получим:

$$H_0^{(0)}: p=p_0,$$

$$H_1^{(0)}: p=p_1.$$

Вычислим для них логарифм отношения правдоподобия:

$$\ln\Lambda=\ln\prod_{m=1}^{n}\frac{f\left(z_i=m\,|\,H_1^{(0)}: p=p_1\right)}{f\left(z_i=m\,|\,H_0^{(0)}: p=p_0\right)}=\ln\frac{C_n^m p_1^m\left(1-p_1\right)^{n-m}}{C_n^m p_0^m\left(1-p_0\right)^{n-m}}.$$

Решающее правило относительно продолжения подачи на вход объекта управления ступенчатых смещений $\pm g$ имеет вид:

$$L_2^{(0)}<m<L_1^{(0)},$$

где $L_1^{(0)}=a_1^{(0)}+b_1^{(0)}n$, $L_2^{(0)}=a_2^{(0)}+b_1^{(0)}n$, $a_1^{(0)}=\dfrac{\ln\dfrac{1-\beta}{\alpha}}{c^{(0)}}$, $a_2^{(0)}=\dfrac{\ln\dfrac{\beta}{1-\alpha}}{c^{(0)}}$,

$$b_1^{(0)}=\frac{\ln\dfrac{1-p_0}{1-p_1}}{c^{(0)}},\ c^{(0)}=\ln\frac{p_1}{p_0}-\ln\frac{1-p_1}{1-p_0}.$$